REPUBLIK INDONESIA
KEMENTERIAN HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA

SURAT PENCATATAN
CIPTAAN

Dalam rangka pelindungan ciptaan di bidang ilmu pengetahuan, seni dan sastra berdasarkan Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta, dengan ini menerangkan:

Nomor dan tanggal permohonan	:	EC00202134616, 23 Juli 2021
Pencipta		
Nama	:	**Prof. Dr. Hj. R. Poppy Yaniawati, M.Pd, Dr. In In Supianti, M.Pd dkk**
Alamat	:	Jl. Kencana Puri I No. 18 RT. 006 RW. 013 Kel. Cijawura Kec. Buah Batu , Bandung, JAWA BARAT, 40287
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Pemegang Hak Cipta		
Nama	:	**Prof. Dr. Hj. R. Poppy Yaniawati, M.Pd, Dr. In In Supianti, M.Pd dkk**
Alamat	:	Jl. Kencana Puri I No. 18 RT. 006 RW. 013 Kel. Cijawura Kec. Buah Batu , Bandung, JAWA BARAT, 40287
Kewarganegaraan	:	Indonesia
Jenis Ciptaan	:	**Modul**
Judul Ciptaan	:	**Turunan Fungsi**
Tanggal dan tempat diumumkan untuk pertama kali di wilayah Indonesia atau di luar wilayah Indonesia	:	23 Juli 2021, di Bandung
Jangka waktu pelindungan	:	Berlaku selama hidup Pencipta dan terus berlangsung selama 70 (tujuh puluh) tahun setelah Pencipta meninggal dunia, terhitung mulai tanggal 1 Januari tahun berikutnya.
Nomor pencatatan	:	000261664

adalah benar berdasarkan keterangan yang diberikan oleh Pemohon.
Surat Pencatatan Hak Cipta atau produk Hak terkait ini sesuai dengan Pasal 72 Undang-Undang Nomor 28 Tahun 2014 tentang Hak Cipta.

a.n. MENTERI HUKUM DAN HAK ASASI MANUSIA
DIREKTUR JENDERAL KEKAYAAN INTELEKTUAL

Dr. Freddy Harris, S.H., LL.M., ACCS.
NIP. 196611181994031001

LAMPIRAN PENCIPTA

No	Nama	Alamat
1	Prof. Dr. Hj. R. Poppy Yaniawati, M.Pd	Jl. Kencana Puri I No. 18 RT. 006 RW. 013 Kel. Cijawura Kec. Buah Batu
2	Dr. In In Supianti, M.Pd	Komp. Permata Biru Blok E No 54 RT 005 RW 019 Kel. Cinunuk Kec. Cileunyi
3	Dahlia fisher, ST., S.Pd., M. Pd	Jl. Kadipaten Raya No. 55 RT 003 RW 003 Kel Antapani Kidul Kec Antapani
4	Anggit Sagita, M.Pd	Perum Ariseta Asri Cibatu Indah Blok A No 02 Rt 01 Rw 13 Desa Wanakerta Kecamatan Cibatu

LAMPIRAN PEMEGANG

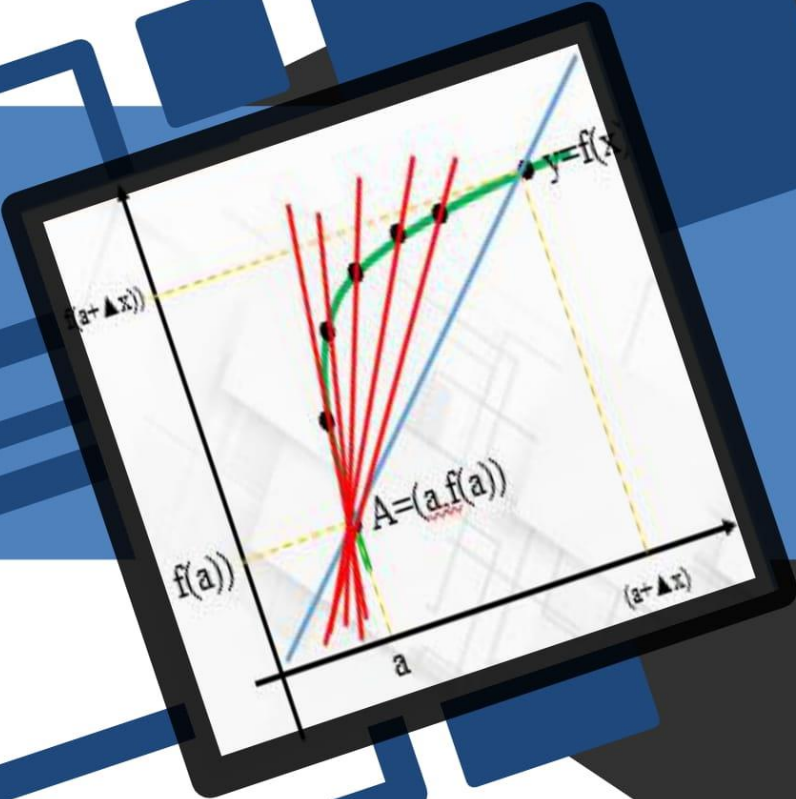
No	Nama	Alamat
1	Prof. Dr. Hj. R. Poppy Yaniawati, M.Pd	Jl. Kencana Puri I No. 18 RT. 006 RW. 013 Kel. Cijawura Kec. Buah Batu
2	Dr. In In Supianti, M.Pd	Komp. Permata Biru Blok E No 54 RT 005 RW 019 Kel. Cinunuk Kec. Cileunyi
3	Dahlia fisher, ST., S.Pd., M. Pd	Jl. Kadipaten Raya No. 55 RT 003 RW 003 Kel Antapani Kidul Kec Antapani
4	Anggit Sagita, M.Pd	Perum Ariseta Asri Cibatu Indah Blok A No 02 Rt 01 Rw 13 Desa Wanakerta Kecamatan Cibatu

K 2013 Rev

MODUL MATEMATIKA

TURUNAN FUNGSI

2021



PENULIS :

Prof. Dr.Hj. R. Poppy Yaniawati, M.Pd.

Dr. In in Supianti, M.Pd.

Dahlia Fisher, ST, S.Pd., M.Pd.

Anggit Sagita, M,Pd.

UNTUK SISWA

SMA/SMK/MAK

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Kuasa, karena atas berkah, rahmat, dan karunia-Nya, penyusunan modul Matematika materi Kaidah Pencacahan untuk SMA, SMK dan MAK dapat diselesaikan.

Modul ini disusun sebagai salah satu bahan ajar dalam pelaksanaan kegiatan belajar mengajar mata pelajaran Matematika di sekolah.

Dalam modul ini disajikan materi turunan fungsi untuk pembelajaran matematika secara sederhana, efektif, dan mudah dimengerti yang disertai contoh dalam kehidupan. Simbol, tabel, diagram, dan gambar disajikan untuk mempermudah siswa dalam memahami materi yang sedang dipelajari. Modul ini juga dilengkapi contoh soal dan tugas-tugas di setiap subbab dan akhir bab.

Sesuai dengan tujuan dalam pembelajaran Matematika, siswa diharapkan dapat memahami konsep matematika, menjelaskan keterkaitan antarkonsep, dan mengaplikasikannya untuk memecahkan masalah.

Siswa juga diharapkan mampu menggunakan penalaran, mengomunikasikan gagasan dengan berbagai perangkat matematika, berpikir kritis, serta memiliki sikap menghargai matematika dalam kehidupan.

Akhirnya kami menyampaikan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu penerbitan modul ini.

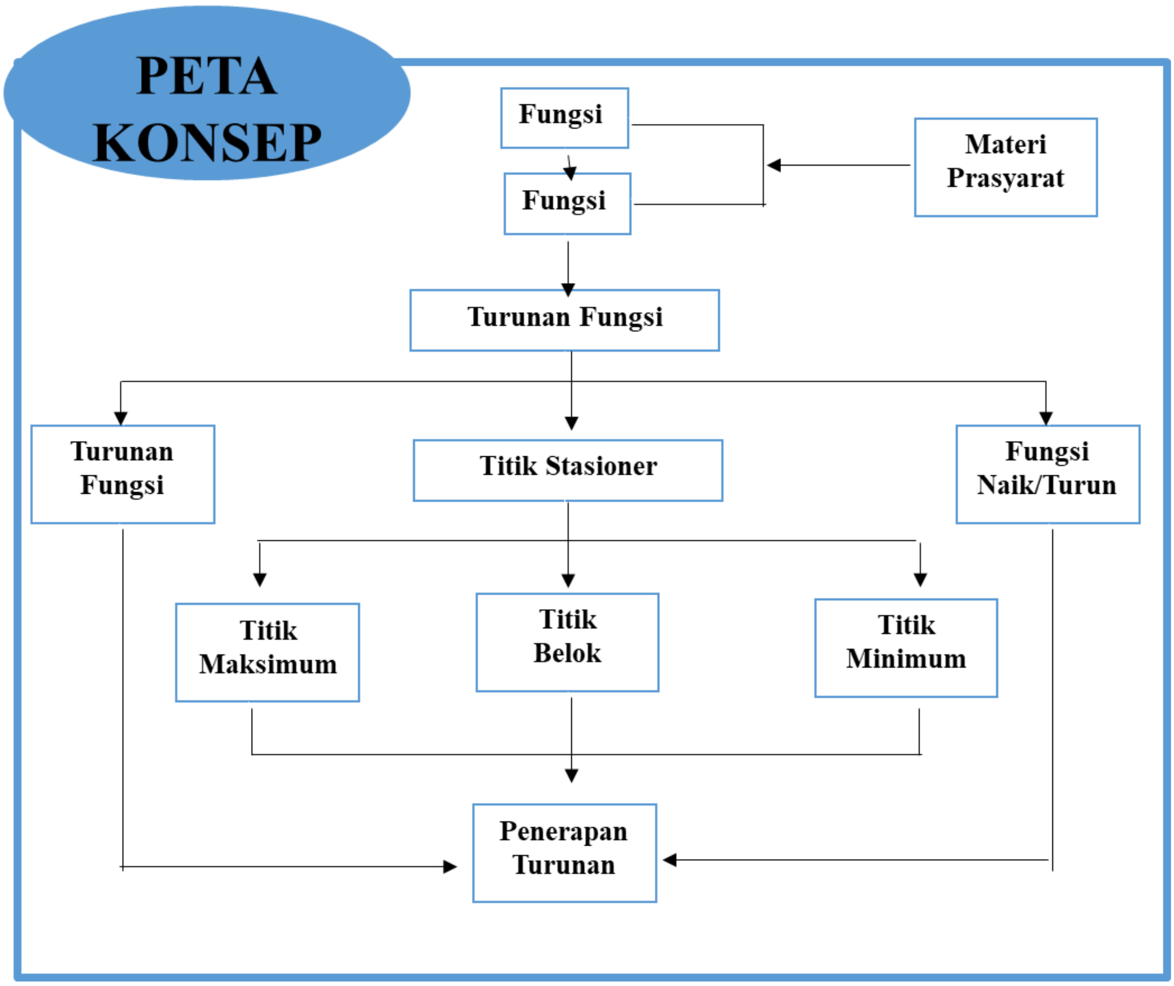
Bandung, 16 Juli 2021

DAFTAR ISI

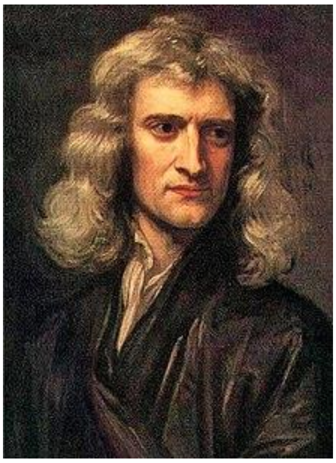
KOMPETENSI DASAR

1. Menjelaskan sifat-sifat turunan fungsi aljabar dan menentukan turunan fungsi aljabar menggunakan definisi atau sifat-sifat turunan fungsi
2. Menganalisis keberkaitanan turunan pertama fungsi dengan nilai maksimum, nilai minimum, serta kemiringan garis singgung kurva
3. Menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi aljabar
4. Menggunakan turunan pertama fungsi untuk menentukan titik maksimum, titik minimum, dan serta kemiringan garis singgung kurva, persamaan garis singgung, berkaitan dengan masalah kontekstual

PETA KONSEP


PETA KONSEP
Fungsi
Fungsi
Materi Prasyarat
Turunan Fungsi
Turunan Fungsi
Titik Stasioner
Fungsi Naik/Turun
Titik Maksimum
Titik Belok
Titik Minimum
Penerapan Turunan

SEJARAH



Newton Lebnitz

Konsep turunan sebagai bagian utama dari kalkulus dipikirkan pada saat yang bersamaan oleh Newton dan Leibniz dari tahun 1665 sampai dengan tabuh 1675 sebagai suatu alat untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam geometri dan mekanika. Sir Isaac Newton (1642 – 1727), ahli matematika dan fisika bangsa Inggris dan Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716, ahli matematika bangsa Jerman dikenal sebagai ilmuan yang menemukan kembali kalkulus. Kalkulus memberikan bantuan tak ternilai pada perkembangan beberapa cabang ilmu pengetahuan lain. Kalkulus digunakan sebagai suatu alat bantu utama dalam menyelesaikan berbagai permasalahan ilmu pengetahuan dan teknologi.

TUJUAN PEMBELAJARAN

1. Siswa dapat menjelaskan dengan sederhana turunan fungsi dengan konsep limit
2. Siswa dapat menentukan Kecepatan Sesaat dengan konsep turunan
3. Siswa dapat menentukan sifat-sifat turunan fungsi aljabar
4. Siswa dapat menentukan persamaan garis singgung kurva
5. Siswa dapat menentukan fungsi naik dan fungsi turun.
6. Siswa dapat menenukan nilai maksimum dan minimum
7. Siswa dapat menentukan nilai stasioner
8. Siswa dapat menyelesaikan masalah dengan konsep turunan

MASALAH KONTEKSTUAL

Sumber Gambar :

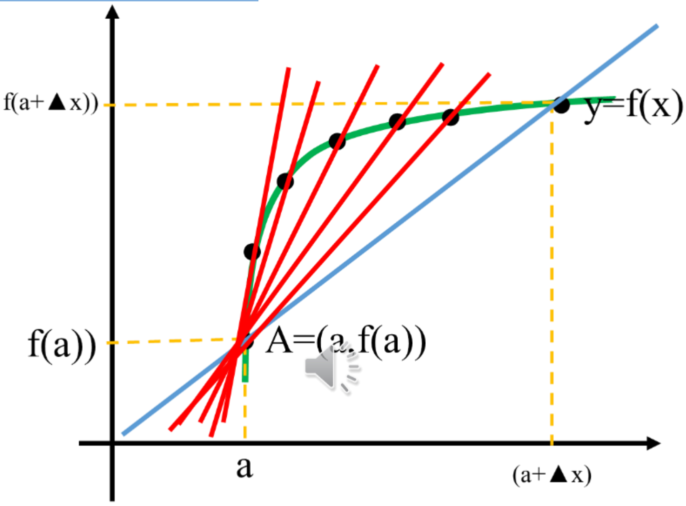
Soedyarto, N.2008 . Matematika Untuk SMA dan MA Kelas XI. Jakarta: Pusat Perbukuan-Depdiknas.

Coba perhatikan alat transportasi yang melintas di jalan raya, contohnya mobil yang melaju di jalan raya. Mobil tersebut memiliki kecepatan yang berbeda-beda. Adapun untuk menghitung kecepatan mobil, kita dapat menggunakan rumus kecepatan yang merupakan turunan dari fungsi. Secara sistematis, rumus kecepatan dapat ditulis (v) = $\frac{ds}{dt}$

A. KOMPETENSI 1

1. GRADIEN GARIS SINGGUNG

Materi Prasayat



Jika dilihat dari gambar maka :

$$m \quad = \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

m adalah gradient garis singgung pada kurva y = f(x) di titik A

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

Contoh :

Tentukan gradient garis singgung pada kurva $f(x) = x^2$ di titik dengan absis x = 2:

Penyelesaian:

untuk x = 2 ;

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2 + \Delta x)^2 - 2^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + \Delta x^2 - 4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

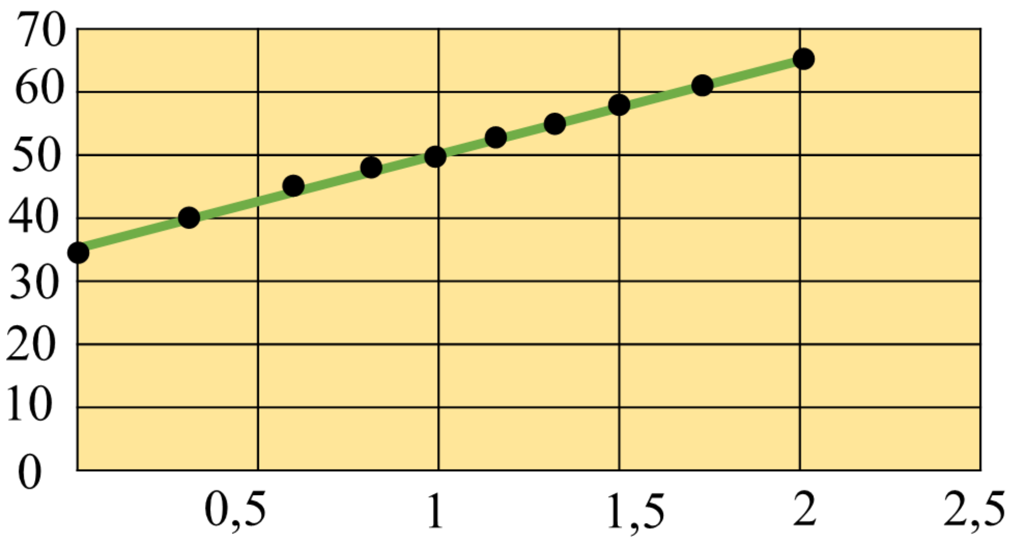
$$= \lim_{\Delta x \to 0} 4 + \Delta x$$

$$= 4$$

2. KECEPATAN SESAAT

Misalkan, jarak yang ditempuh mobil dituliskan sebagai fungsi berikut

$$f(x) = 12x^2 + 20, \qquad 0 \leq x \leq 2$$



Selang waktu	**0-1**	**0,8-1**	**0,9-1**	**0,99-1**	**0,999-1**	**0,9999-1**	**1-1,0001**	**1-1,001**	**1-1,01**	**1-1,5**
	35	47	48,5	48,85	49,985 0	49,9985	50,0015	50,015	50,15	57,5

Contoh :

Sebuah benda bergerak dengan mengikuti persamaan $f(x) = 6x^3 + x^2$, dengan f(x) dalam meter dan x dalam detik

a. Tentukan kecepatan rata-rata dalam selang waktu $2 \leq x \leq 3$
b. Tentukan kecepatan sesaat pada x = 2 detik.

Penyelesaian:

a. $V\ rata - rata = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{f(3)-f(2)}{3-2}$

$$= (6(3^3) + 3^2) - (6(2^3) + 2^2)$$

$$= 119\ meter/detik$$

b. Kecepatan sesaat ketika x= 2 detik :

$$\text{v} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(6(2+\Delta x)^3+(2+\Delta x)^2)-(6(2)^3+(2)^2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 6\Delta x^2 + 37\Delta x$$

$$= 76\ meter/detik$$

3. TURUNAN DI FUNGSI x = a

Turunan (derivativ) dari sebuah fungsi f adalah sebuah fungsi yang diberi lambang f' $(dibaca$: "f aksen")

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Contoh :

Jika $f(x) = x^2 - x$, tentukan $f'(5)$

Penyelesaian:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(5) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(5) + \Delta x) - f(5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{((5 + \Delta x)^2 - (5 + \Delta x)) - (5^2 - 5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{25 + 10\Delta x + \Delta x^2 \quad - 5 - \Delta x - 25 + 5}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(9 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= 9$$

4. NOTASI LEIBNITZ dan RUMUS TURUNAN FUNGSI BENTUK ax^n

$$y = f(x) \to \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = y' = f'(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x) = ax^n$$

$$f'(x) = nax^{n-1}$$

Contoh :

Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut

a. $f(x) = 3x^5$

$f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

Penyelesaian:

a. $f(x) = 3x^5$

$= 3(5)x^{5-1}$

$= 15x^4$

b. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

$= \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}$

$= \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$

5. RUMUS TURUNAN FUNGSI BENTUK U.V

Jika diketahui fungsi :

$$y = f(x) = u(x).\, v(x)$$

Maka turunan fungsi tersebut adalah :

$$y' = f'(x) = u'(x).\, v(x) + u(x).\, v'(x)$$

Contoh :

Tentukan turunan fungsi dari $f(x) = (5x^2 - 1)(3x - 2)$

Penyelesaian:

$$f(x) = (5x^2 - 1)(3x - 2)$$

$u = (5x^2 - 1)$ $\qquad$ $v = (3x - 2)$

$u' = 10x$ $\qquad$ $v' = 3$

Turunan fungsi tersebut :

$$y' = f'(x) = u'(x).\, v(x) + u(x).\, v'(x)$$

$$f'(x) = 10x(3x - 2) + (5x^2 - 1).\, 3$$

$$f'(x) = 45x^2 - 20x - 3$$

6. RUMUS TURUNAN FUNGSI BENTUK $\frac{u(x)}{v(x)}$

Jika diketahui fungsi :

$$y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

Maka turunan fungsi tersebut adalah :

$$y' = f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{(v(x))^2}$$

Contoh :

Tentukan turunan fungs dari $f(x) = \frac{(5x^2-1)}{(3x-2)}$

Penyelesaian:

$$f(x) = \frac{(5x^2-1)}{(3x-2)}$$

$u = (5x^2 - 1)$ $\quad\quad\quad\quad$ $v = (3x - 2)$

$u' = 10x$ $\quad\quad\quad\quad$ $v' = 3$

Turunan fungsi tersebut :

$$f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{10x(3x-2) - (5x^2-1).3}{(3x-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{15x^2 - 20x + 3}{(3x-2)^2}$$

7. RUMUS TURUNAN FUNGSI BENTUK $\boldsymbol{u^n}$

Jika diketahui fungsi :

$y = f(u) = u^n$, dimana $u = g(x)$

Maka turunan fungsi tersebut adalah :

$$y' = nu^{n-1}.u'(x)$$

Contoh :

Tentukan turunan fungsi $f(x) = (2 + 3x^2)^9$

Penyelesaian:

$$f(x) = (2 + 3x^2)^9$$

$$f'(x) = 9u^{8-1}.u'(x)$$

$$= 9\ (2 + 3x^2)^8.6x$$

$$= 54x\ (2 + 3x^2)^8$$

QUIZ BAGIAN 1

1. Apabila $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 1$, maka$f'(x) = \cdots$

   A. $x - x^{-2}$

   B. $x + x^{-2}$

   C. $2x + x^{-2} + 1$

   D. $2x - x^{-2} + 1$

   E. $2x + x^{-2}$

Kunci Jawaban

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 1$$

$$= x^2 - x^{-1} + 1$$

$$f'(x) = 2x^2 - (-1)x^{-1-1} + 0$$

$$= 2x + x^{-2}$$

(Jawaban E)

2.

Jika $R(t) = t\sqrt{t} + \dfrac{1}{t\sqrt{t}}$, maka $\dfrac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}$ sama dengan ⋯⋅

A. $\dfrac{3}{2}\sqrt{t} + \dfrac{3}{2\sqrt{t}}$

B. $\dfrac{3}{2}\sqrt{t} - \dfrac{3}{2\sqrt{t}}$

C. $\dfrac{3}{2}\sqrt{t} - \dfrac{3}{2t^2\sqrt{t}}$

D. $\dfrac{2}{3}\sqrt{t} - \dfrac{1}{t^2\sqrt{t}}$

E. $\dfrac{3}{2}\sqrt{t} + \dfrac{1}{t^2\sqrt{t}}$

Diketahui

$$R(t) = t\sqrt{t} + \frac{1}{t\sqrt{t}} = t \cdot t^{1/2} + \frac{1}{t \cdot t^{1/2}}$$
$$= t^{3/2} + t^{\ \ 3/2}$$

Dengan menggunakan aturan dasar turunan, diperoleh

$$\frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{3}{2}t^{3/2\ \ 1} - \frac{3}{2}t^{\ \ 3/2\ \ 1}$$
$$= \frac{3}{2}t^{1/2} - \frac{3}{2}t^{\ \ 5/2}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{t} - \frac{3}{2t^2\sqrt{t}}$$

Jadi, hasil dari $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{3}{2}\sqrt{t} - \dfrac{3}{2t^2\sqrt{t}}}$

(Jawaban C)

3. Diberikan $f(r) = 2r^{\frac{3}{2}} - 2r^{\frac{1}{2}}$. Nilai $f'(1)$ adalah…

A. 0

B. 1

C. 2

D. 4

E. 5

Kunci Jawaban

Diketahui :

$f(r) = 2r^{\frac{3}{2}} - 2r^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 2.\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}-1} - 2.\frac{1}{2}r^{\frac{1}{2}-1}$

$= 3r^{\frac{1}{2}} - r^{-\frac{1}{2}}$

$= 3\sqrt{r} - \frac{1}{r}$

Untuk $r = 1,\ f'(1) = 3\sqrt{1} - \frac{1}{1} = 3 - 2 = 2$

(Jawaban C)

4. Turunan pertama dari y $= (2x + 3)^3 - 4x + 1$ adalah…

   A. $24x^2 + 36x + 50$
   B. $24x^2 + 72x + 50$
   C. $36x^2 + 24x + 50$
   D. $24x^2 + 18x + 54$
   E. $18x^2 + 72x + 54$

Kunci Jawabaan

$y = (2x + 3)^3 - 4x + 1$

$= 3(2x + 3)^2 . 2 - 4$

$= 6(4x^2 + 9 + 12x) - 4$

$= 24^2 + 72x + 54 - 4$

$= 24x^2 + 72x + 50$

(Jawaban B)

5. Jika $y = (x^2 - 1)(x^3 + 3)$ maka $\frac{dy}{dx}$ adalah…

   A. $2x^4 + 6x + 3x^2$
   B. $5x^4 + 6x - 3x^2$
   C. $5x^4 - 6x - 3x^2$
   D. $2x^4 + 6x - 2x^2$
   E. $5x^4 + 6x - 2x^2$

Kunci Jawaban

$u = x^2 - 1$

$u' = 2x$

$v = x^3 + 3$

$v' = 3x^2$

$y' = u'.v + u.v'$

$= (2x)(x^3 + 3) + (x^2 - 1)(3x^2)$

$= 24x^4 + 6x + 3x^4 - 3x^2$

$= 5x^4 + 6x - 3x^2$

(Jawaban B)

6. Diketahui $f(x) = (x^2 - 2x + 3)^4$ dan

f' adalah turunan fungsi f. Nilai $f'(2)$ adalah

A. 216

B. 108

C. 72

D. 36

E. 24

$$f(x) = (x^2 - 2x + 3)^4$$

$$f'(x) = 4\left(x^2 - 2x + 3\right)^3 \cdot (2x - 2)$$

$$f'(2) = 4 \cdot (4 - 4 + 3)^3 \cdot 2 = 8 \cdot 27 = 216 \quad \text{(Jawaban A)}$$

7. Jika $f(x) = \frac{(x^2+1)}{x-1}$. Carilah turunan fungsinya !

A. $f'(x) = \frac{x^2+2x-1}{(x-1)^2}$

B. $f'(x) = \frac{x^2-2x+1}{(x-1)^2}$

C. $f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

D. $f'(x) = \frac{x^2+2x+1}{(x-1)^2}$

E. $f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x+1)^2}$

Kunci Jawaban

$u = x^2 + 1$ $\quad\quad$ $v = x - 1$

$u' = 2x$ $\quad\quad$ $= 1$

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2+1).1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

(Jawaban C)

8. Sebuah roket bergerak vertical ke atas dengan kecepatan awal 10 m/detik. Kedudukan roket setelah t detik memenuhi persamaan $h(t) = 30t - 6t^2$ dengan $h(t)$ adalah tinggi roket yang diukur dalam meter.

   Carilah kecepatan roket pada saat 1,5 detik.

   A. 12m/det D. 10m/det
   B. 13m/det E. 14m/det
   C. 11m/det

Kunci Jawaban

Kecepatan awal peluru = 10 m/det

Kedudukan peluru pada t detik $= h'(t) = 30 - 12t$

Jadi kecepatan peluru pada saat t = 1,5 adalah

$$v(1{,}5) = 30 - 12(1{,}5) = 12m/det$$

(Jawaban A)

B. KOMPETENSI 2

1. PERSAMAAN GARIS SINGGUNG KURVA

Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $A\big(a, f(a)\big)$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Persamaan garis lurus yang melalui $P(x_1, y_1)$ dengan gradien m

$$\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Persamaan garis singgung di titik $A(a, f(a))$ pada kurva y

$$\mathbf{y - f(a) = f'(a).(x - a)}$$

Contoh :

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $f(x) = x^2$ di titik $(-2,4)$

Penyelesaian:

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x$$

Substitusikan titik (-2,4) ke dalam persamaan garis singgung :

$$y - 4 = f'(-2).\big(x - (-2)\big)$$

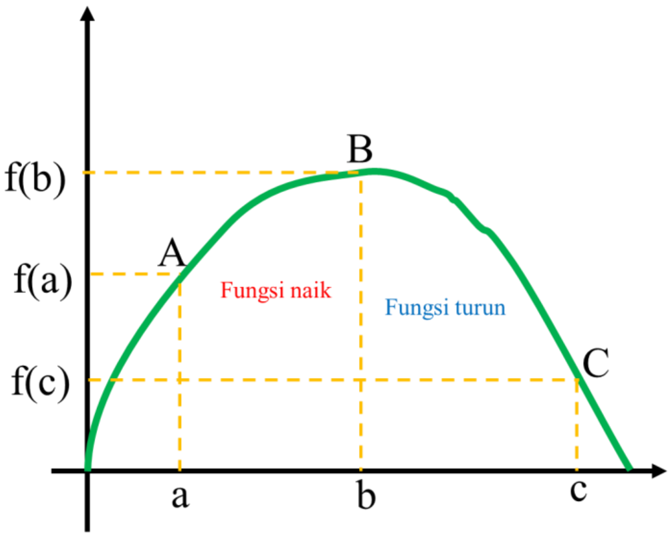
$$y - 4 = 2(-2).(x + 2)$$

$$y = -4x - 4$$

2. FUNGSI NAIK DAN FUNGSI TURUN

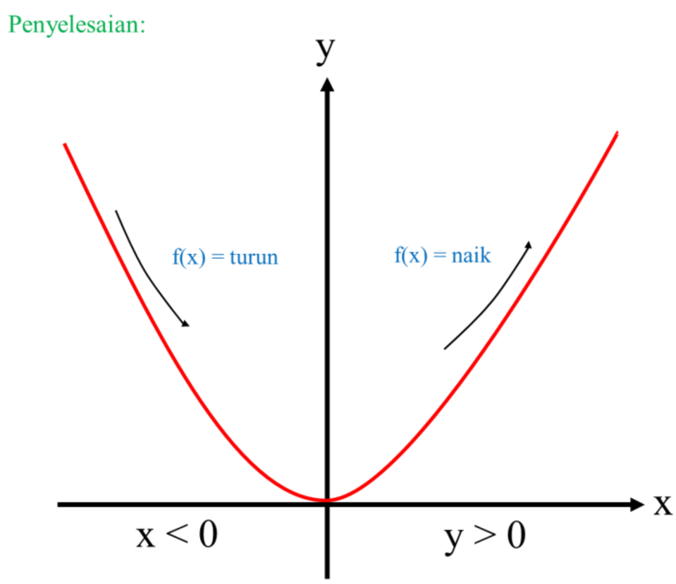
Misalkan f terdefinisikan pada selang I, maka dapat dikatakan bahwa :

- F naik pada I jika untuk setiap pasangan bilangan a dan b dalam I, a < b mengakibatkan f(a) > f(b)
- F turun pada I jika untuk setiap pasangan bilangan a dan b dalam I, a < b mengakibatkan f(a) < f(b)



Contoh 1:

Tentukan fungsi naik dan fungsi turun dari fungsi kuadrat $f(x) = x^2$ dalam bentuk grafik



Contoh 2:

Periksa naik dan turunnya fungsi-fungsi berikut

$f(x) = 10x - x^2$ pada selang (0,10)

Penyelesaian:

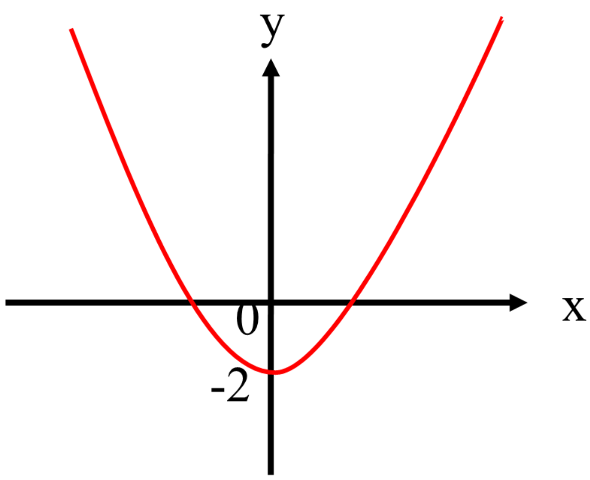
$f(x) = 10x - x^2$ maka $f'(x) = 10 - 2x$

Misalkan, p anggota (0,10) sehingga 0 < p < 10

$f'(p) = 10 - 2p > 0$ untuk p < 5 dan $f'(p) = 10 - 2p < 0$

Untuk p > 5 dengan demikian $f'(x) = 10 - x^2$ $pada\ \ selang$ (0,10) merupakan fungsi naik dan turun

3. MAKSIMUM DAN MINIMUM FUNGSI



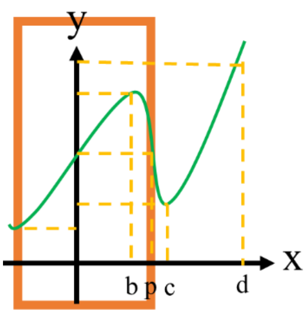
Fungsi f(x) di x = 0 tidak naik dan tidak turun.

Titik ini (0,-2) di sebut titik stasioner.

Jika $f'(x) = 0$ $ketika$ $x = a,$ $f(x)$ tidak naik dan tidak turun.

Dalam hal ini f(a) disebut stasioner, sedangkan (a, f(a)) merupakan koordinat titik stasioner.

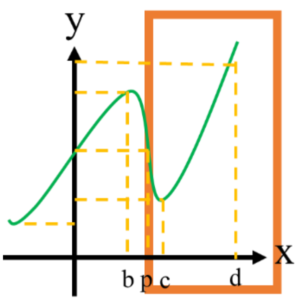
Titik stasioner dapat berupa titik balik maksimum atau titik balik minimum.



$D_f = \{x/a \leq x \leq p\}.$

Nilai maks = f(b) = 0 →f'(b) = 0

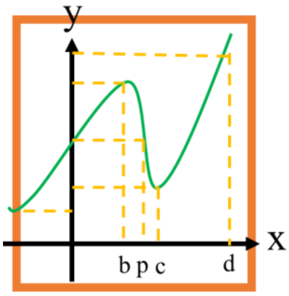
Nilai min = f(a) → min global



$D_f = \{x/p \leq x \leq 0\}.$

Nilai maks = f(d) → maks global

Nilai min = f(c) → f'(c) = 0



$D_f = \{x/a \leq x \leq d\}$.
Nilai maks = f(b) → maks global Nilai min = f(c) → min $relatif$

Contoh :

Tentukan nilai maksimum dan minimum $f(x) = 2x^2 - x$, $untuk$

- $D_f = \{x/-1 \leq x \leq 2\}$

Penyelesaian:

$f(x) = 2x^2 - x \leftrightarrow f'(x) = 4x - 1 \leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

$x = \frac{1}{4}$ dengan $D_f = \{x/-1 \leq x \leq 2\}$

$f\left(\frac{1}{4}\right) \quad = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} \quad = -\frac{1}{8}$` …(1)

$f(-1) = 2(-1)^2 - 1 = 1$` …(2)

$f(2) \quad = 2(2)^2 - 2 \quad = 6$` …(3)

Dari (1), (2), (3) diperleh f(2) = 6 adalah

$f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$ adalah nilai minimum

$f(x) = 2x^2 - x$ dengan $D_f = \{x/-1 \leq x \leq 2\}$

4. NILAI STASIONER

Misalkan fungsi $y = f(x)$ dapat diturunkan di x = c

Fungsi $y = f(x)$ memiliki nilai starioner f(c)

Jika $f'(c) = 0$ dan titik $(c, f(c))$ di sebut ***titik stasioner***

Contoh 1 :

Tentukan nilai stsioner fungsi $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

Penyelesaian:

$f(x) = 3x^2 - 6x + 5 \rightarrow f'(x) = 6x - 6$

Nilai stasioner diperoleh jika $f'(x) = 0$ sehingga

$f'(x) \quad = 0$

$6x - 6 = 0$

$x = 1$

$f(1) = 3.1^2 - 6.1 + 5 = 2$

Jadi nilai stasioner $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

Adalah $f(1) = 2$

Contoh 2:

Tentukan nilai stasioner fungsi $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

Penyelesaian:

$f(x) = 3x^2 - 6x + 5 \rightarrow f'(x) = 6x - 6$

Nilai stasioner diperoleh jika $f'(x) = 0$ sehingga

$f'(x) = 0$

$6x - 6 = 0$

$x = 1$

$f(1) = 3.1^2 - 6.1 + 5 = 2$

Jadi nilai stasioner $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

Adalah $f(1) = 2$

5. PENERAPAN TURUNAN FUNGSI

Contoh :

Sebuah bola dilempar vertical ke atas. Dalam waktu t detik ketinggian yang dicapai oleh bola dengan persamaan $h(t) = 72t - 9t^2$.

a. Tentukan waktu (t) yang dieperlukan sehingga tinggi bola maksimum
b. Tentukan tinggi maksimum yang dicapai bola itu.

Penyelesaian:

a. $h(t) = 72t - 9t^2$

$$h'(t) = 72 - 18t$$

Agar mencapai maksimum maka $h'(t) = 0$

$$h'(t) = 72 - 18t$$

$$0 = 72 - 18t$$

$$18t = 72$$

$$t = 4\ detik$$

b. Tinggi maksimum yang dicapai bola itu adalah :

$$h(t) = 72t - 9t^2$$

$$= 72.4 - 9.4^2$$

$$= 72.4 - 9.16$$

$$= 288 - 144$$

$$= 144\ meter$$

QUIZ BAGIAN 2

1. Tentukan gradien garis singgung kurva $f(x) = x^3$ di titik dengan absis 3!

   A. 25 D. 28
   B. 26 E. 29
   C. 27

Kunci Jawaban

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x)^3 - 3^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3^3 + 3.3^2\Delta x + \Delta x^3 - 3^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{27\Delta x + 9.(\Delta x)^2\Delta x + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(27\Delta x + 9.(\Delta x) + (\Delta x)^2)\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 27 + 9\Delta x + \Delta x^2$$

$$= 27$$

(Jawaban C)

2. Ditentukan $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 10$. tentukan interval kurva $y = f(x)$ naik.

   A. x < -1 atau x > 5 D. x < -1 atau x > 4
   B. x > -1 atau x > 5 E. x < -2 atau x > 4
   C. x < -2 atau x > 5

Kunci Jawaban

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 10$$

$$f'(x) = x^2 - 4x - 5$$

Syarat fungsi naik :

$$f'(x) > 0$$

$$x^2 - 4x - 5 > 0$$

$$(x+1)(x-5) > 0$$

$$x + 1 = 0 \ atau \ x - 5 = 0$$

$$x = -1 \ awau \ x = 5$$

Interval x agar kurva naik adalah x < -1 atau x > 5

(Jawaban A)

3. Tentukan nilai stasioner fungsi $f(x) = 3x^2 = 6x + 5$

A. 5 D. 2

B. 4 E. 1

C. 3

Kunci Jawaban

$$f(x) = 3x^2 = 6x + 5 \rightarrow \; f'(x) = 6x - 6$$

Nilai stasioner diperoleh jika $f'(x) = 0$ sehingga

$$f'(x) = 0$$

$$6x - 6 = 0$$

$x = 1$

(Jawaban E)

4. Diketahui kurva y = x^2 – 3x + 4 dan titik A (3,4). Tentukan persamaan garis singgung di titik A.

A. 5x-3 D. 3x+5

B. x+3 E. 3x-5

C. x-3

Kunci Jawaban

y = x^2 – 3x + 4 ➔ y' = 2x – 3

m = $y'_{x=3}$ = 2.3 – 3 = 6 – 3 = 3

Persamaan garis singgung di titik A (3,4)

$y - y_1 = m (x - x_1)$

y – 4 = 3 (x – 3) y – 4 = 3x – 9

y = 3x – 5

(Jawaban E)

5. Jika garis l menyinggung kurva dengan persamaan $y = x^3 - 5x^2 + 7$ di titik (1,3), maka persamaan garis l adalah

A. $10x + y - 7 = 0$

B. $7x + y - 10 = 0$

C. $7x + y - 2 = 0$

D. $5x + y - 7 = 0$

E. $x - y - 5 = 0$

Kunci Jawaban

Diketahui $y = x^3 - 5x^2 + 7$

Turunan pertamanya adalah $3x^2 - 10x$

Karena titik singgungnya di (1,3), maka gradient garis singgung l diperoleh saat x = 1, yaitu

$$m = y'_{x-1} = 3(1)^2 - 10(1) = -7$$

Persamaan garis yang bergradien $m = -7$ dan melalui titik (x_1, y_1) = (1,3) adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = -7(x - 1)$$

$$y - 3 - 7x + 7 = 0$$

$$7x + y - 10 = 0$$

(Jawaban B)

6. Persamaan garis yang melalui titik A(1,1) dan tegak lurus dengan garis singgung kurva $y = x^3 - 3x^2 + 3$ di titik tersebut adalah…

   A. $y + 3x - 4 = 0$

   B. $y + 3x - 2 = 0$

   C. $3y - x + 2 = 0$

   D. $3y - x - 2 = 0$

   E. $3y - x - 4 = 0$

Kunci Jawaban

Diketahui $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

Titik singgung di (1,1)

Substirusi x = 1 pada $f'(x)$ untuk mendapatkan gradien garis singgung.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$m' = f'(x) = 3(1)^2 - 6(1)$$

$$= 3 - 6 = -3$$

Garis yang tegak lurus memiliki gradien

$$m = -\frac{1}{m'} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}$$

Persamaaan garis yang melalui titik $(x_1, y_1) = (1,1)$ dan bergradaien $m = \frac{1}{3}$ adalah.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1)$$

$$3y - 3 = x - 1$$

$3y - x - 2 = 0$ (Jawaban D)

7. Suatu pembangunan proyek gedung sekolah dapat diselesaikan dalam x hari dengan biaya proyek per hari $\left(2x - 600 + \frac{30}{x}\right)$ *ribu rupiah.* Agar biaya proyek minimum, proyek tersebut harus diselesaikan dalam waktu …. hari

   A. 80
   B. 100
   C. 150
   D. 240
   E. 320

Kunci Jawaban

Misalkan $f(x)$ menyatakan biaya proyek selama x hari salam satuan ribu rupiah, sehingga :

$$f(x) = x\left(2x - 600 + \frac{30}{x}\right)$$

$$= 2x^2 - 600x + 30$$

Agar biaya proyek minimum, nilai x ditentukan

$$f'(x) = 0$$

$$4x - 600 = 0$$

$$4x = 600$$

$$x = 150$$

Padi proyek tersebut harus diselesaikan dalam waktu 150 hari. (Jawaban C)

8. Sebuah peluru ditembakan ke atas. Jika tinggi h meter setelah t detik dirumuskan dengan $h(t) = 120t - 5t^2$, maka tinggi maksimum yang dicapai peluru tersebut adalah …. meter

   A. 270
   B. 320
   C. 670
   D. 720
   E. 770

Kunci Jawaban

Diketahui :$h(t) = 120t - 5t^2$

$$h'(t) = 120 - 10t$$

Nilai t maksimum saat $h'(t) = 0$

$$120 - 10t = 0$$

$$t = 12$$

Ketinggian maksimum yang dapat dicapai peluru adalah pada saat t = 12

$$h(12) = 120(12) - 5(12)^2$$

$$= 1440 - 720$$

$$720$$

Ketingian maksimum peluru adalah 720 meter (Jawaban D)

RANGKUMAN

- M adalah gradient garis singgung pada kurva y = f(x) di titik A

$$m = \lim_{x \to 0} \quad \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

- Turunan (derivativ) dari sebuah fungsi f adalah sebuah fungsi yang diberi lambang f' $(dibaca$: "f aksen")

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
- $f(x) = ax^n \ \rightarrow \ f'(x) = nax^{n-1}$
- Jika diketahui fungsi $y = f(x) = u(x).v(x)$

  Maka turunan fungsi tersebut adalah

$$y' = f'(x) = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

- Jika diketahui fungsi $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

  Maka turunan fungsi tersebut adalah

$$y' = f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{(v(x))^2}$$

- Jika diketahui fungsi $y = f(u) = u^n$, dimana $u = g(x)$
- Maka turunan fungsi tersebut adalah : $y' = nu^{n-1}.u'(x)$
- Persamaan garis lurus yang melalui $P(x_1, y_1)$ dengan gradien m

$$\boldsymbol{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

- Persamaan garis singgung di titik $A(a, f(a))$ pada kurva y

$$\boldsymbol{y - f(a) = f'(a).(x - a)}$$

- Misalkan f terdefinisikan pada selang I, maka dapat dikatakan bahwa :

  - F naik pada I jika untuk setiap pasangan bilangan a dan b dalam I, a < b mengakibatkan f(a) > f(b)
  - F turun pada I jika untuk setiap pasangan bilangan a dan b dalam I, a < b mengakibatkan f(a) < f(b)

- Jika $f'(x) = 0\ ketika\ x = a,\ f(x)$ tidak naik dan tidak turun.

  Dalam hal ini f(a) disebut stasioner, sedangkan (a, f(a)) merupakan koordinat titik stasioner.
  Titik stasioner dapat berupa titik balik maksimum atau titik balik minimum.

- Misalkan fungsi $y = f(x)$ dapat diturunkan di x = c

  Fungsi $y = f(x)$ memiliki nilai starioner f(c)
  Jika $f'(c) = 0$ dan titik $(c, f(c))$ di sebut ***titik stasioner***

REFERENSI

Soedyarto, N.2008 . Matematika Untuk SMA dan MA Kelas XI. Jakarta: Pusat Perbukuan-Depdiknas.

Djumanta, W. 2008. Mahir Mengembangkan Kemampuan Matematika. Jakarta: Pusat Perbukuan-Depdiknas

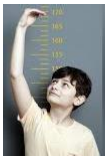
https://mathcyber1997.com/

Bahan Ajar Interaktif Kemdikbud 2012

POST TEST

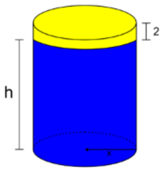
1. Sebuah benda bergerak sepanjang garis lurus sehingga kedudukannya seteleh x detik memenuhi persamaan $f(x) = 6x^3 + x^2$ dengan $f(x)$ adalah jarak dari titik pangkal dalam satuan meter. Tentukanlah kecepatan sesaat benda pada x = 2 detik menggunakan konsep limit ?

2. Diketahui tinggi badan seorang anak pada usia 14-16 tahun adalah tetap yaitu $T(t) = 155\ cm$. Tentukan laju pertumbuhan tinggi badan anak tersebut dengan konsep dasar turunan fungsi !



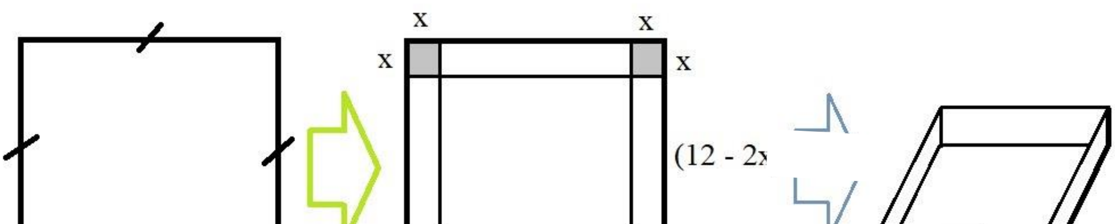
3. Sebuah peluru ditembakkan vertikal ke atas dengan kecepatan awal $10\ m/det$. Kedudukan peluru setelah t detik memenuhi persamaan $h(t) = 30t - 6t^2$dengan $h(t)$ adalah tinggi peluru yang diukur dalam meter. Kapan peluru berhenti (dalam satuan detik)?

4. Selembar aluminium akan dibuat silinder tanpa tutup dengan volume $8000\pi\ cm^3$. Tentukan tinggi dan jari-jari alas silinder agar alumunium yang digunakan seminimal mungkin!

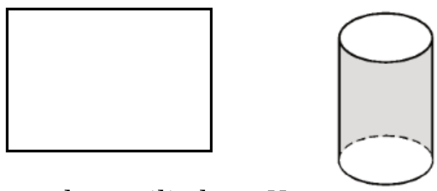


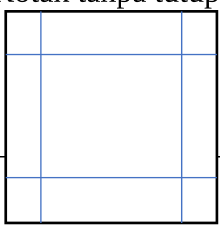
5. Sebuah taman berbentuk persegi panjang dengan keliling $(2x + 24)$ meter dan lebar $(8 - x)$ meter. Carilah panjang taman tersebut dengan konsep turunan fungsi agar luas taman maksimum.

6. Terdapat kotak tanpa tutup dari sehelai karton yang berbentuk bujur sangkar (persegi) dengan rusuk = 20 cm, dengan jalan memotong bujur sangkar kecil pada keempat sudutnya (seperti pada gambar 1). Tentukan ukuran kotak supaya isinya sebanyak banyaknya.



KUNCI JAWABAN POST TEST

No	Kunci Jawaban	Skor
1.	Dik: $f(x) = 6x^3 + x^2$ Dit : Kecepatan sesaat pada x = 2 detik Jawab : $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(6(2+\Delta x)^3 + (2+\Delta x^2)) - (6.2^3 + 2^2)}{\Delta x}$ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{6(8 + 12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3) + (4 + 4.\Delta x}{\Delta x}$ $\lim_{\Delta x \to 0} 6\,\Delta x^2 + 37\Delta x + 76 = 76$ Jadi Kecepatan pada saat x = 2 atau pada detik kedua adalah 76 meter/detik	 1 1 1 1 1
		5
2.	Dik : tinggi anak usia 14 – 16 th = 155 cm Dit : laju pertumbuhan tersebut Jawab : Tinggi badan anak terebut pada usia 14 sampai 16 tahun tetap. Oleh karena itu T(t) = 155 cm adalah fungsi konstan sehingga $T'(t) = 0$.	 1 1
		2
3.	Dik : Kecepatan Awal : $10\,{}^{m}/_{detik}.$ Memenuhi persamaan : $h(t) = 30t - 6t^2$ Dit : Peluru berhenti (dalam satuan detik) Jawab : Dalam fisika kecepatan merupakan turunan dari kedudukan terhadap waktu sehingga $v(t) = h'(t) = 30 - 12t$. Peluru akan berhenti ketika kecepatan nol sehingga $v(t) = 0$ $\Leftrightarrow 30 - 12t = 0$ $\Leftrightarrow t = 2{,}5$ Jadi peluru berhenti pada saat 2,5 detik	 1 1 1 1 1
		5
4.	Dik : volume silinder tanpa tutup = $8000\pi\ cm^3$ Dit :Tentukan tinggi dan jari-jari silinder agar minimal Jawab  Misalkan, volume silinder = $V(r), tinggi\ silinder = t, jari - jari\ alas\ silinder = r\ dan\ luas\ permukaan\ silinder = L\ (r)$ $V(r) = luas\ alas\ x\ tinggi$ $= \pi r^2 x t = 8000\pi$ $sehingga\ t = \frac{8000\pi}{\pi r^2} = \frac{8000}{r^2}$ …….(1)	 1 1 1 1 1

	$L(r) = luas\ alas + luas\ selubung = \ \pi r^2 + 2\pi rt$ ……..(2) $Substitusikan\ (1)\ ke\ (2)$ $L(r) = \pi r^2 - 2\pi r\left(\frac{8000}{r^2}\right) = \pi r^2 + 2\pi rt$ Nilai stasioner $L\ (r)$ diperoleh jika nilai $L'(r) = 0\ sehingga$ $L'(r) = 2\pi r - \frac{16000\pi}{r^2}$ $\leftrightarrow 2\pi r - \frac{16000\pi}{r^2} = 0$ $\leftrightarrow 2\pi r = \frac{16000\pi}{r^2}$ $\leftrightarrow r^3 = 8000$ $\leftrightarrow r \quad = 20$ …….(3) $Substitusikan$ 3 ke 1 sehingga diperoleh $t = \frac{8000}{r^2} = \frac{8000}{400} = 20$ Jadi tinggi silinder t = 20 dan jari jari alas r = 20 cm	1 1 1 1 1 1 1 1 1
		14
5.	Dik : keliling persegi panjang = (2x+34) meter Lebar persegi panjang = (8 – x) meter Dit : Panjang taman agar luas maksimum Jawab Panjang taman tersebut dapat ditentukan dngan menggunakan keliling dan lebarnya $k = 2(p + l)$ $2x + 24 = 2(p + 8 - x)$ $x + 12 = p + 8 - x$ $p = 2x + 4$ Nyatakan luas persegi panjang sebagai fungsi terhadap variable x $L(x) = px\ l$ =(2x+4).(8-x) $= -2x^2 + 12x + 32$ Luas akan maksimum saat $L'(x) = 0$, sehingga $L'(x) = 0$ $-4x + 12 = 0$ $4x = 12$ $x = 3$ Saat $x = 3$, diperoleh $p = 2x + 4$ $p = 2(3) + 4 = 10$ Jadi panjang taman tersebut adalah 10 meter	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
		18
6.	Dik : Kotak tanpa tutup rusuknya = 20 cm 	1

	Dit : Tentukan ukuran kotak supaya isi sebanyak-banyaknya Jawab : Panjang = $(20-2x)$ Lebar = (20-2x) Tinggi = x cm Sehingga volume kotak Volume = $(20-2x)(20-2x)x\ cm^3$ $= 400x - 80x^2 + 4x^3\ cm^3$ Terdapat suatu fungsi x dari volime kotak $v(x) = 400x - 80x^2 + 4x^3$ Supaya kotak tersebut mempunyau volume yang maksimum, maka : $V'(x) = \ 0$ $400 - 160x + 12x^2 = 0$ $12x^2 - 160x + 400 = 0$ $3x^2 - 40x + 100 = 0$ $3x - 10 = 0 \quad atau \quad x - 10 = 0$ $x = \frac{10}{3} \qquad\qquad x = 10$ • Untuk $x = 10$ maka $v(0) = 0$ mendapatkan titik (10,0) merupakan titik balik minimum. Sehingga titik ini tidak memenuhi, arena yang diminta adalah volume maksimum • Untuk $x = \frac{10}{3}$ maka $v\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{16.000}{27}$ mendapatkan titik $\left(\frac{10}{3}, \frac{16.000}{27}\right)$ menunjukan titik balik maksimum, sehingga suaya volume kotak yang dibuat maksimum dicapai bila $x = \frac{10}{3}$ atau dengan kata lain; karton tersebut dipotong pada keempat sudutnya dengan bentuk bujur sangkar dengan sisi $\frac{10}{3}cm$. Jadi ukuran kotaknya: Panjang = $\left(20 - 2.\frac{10}{3}\right)cm = \frac{40}{3}cm$ Lebar = $\frac{40}{3}cm$ Tinggi = $\frac{10}{3}$ cm	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
		18