**PENGEMBANGAN MODEL MATEMATIS DUA TAHAP UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH SA-C-HMLRP (*Capaitated Hierarchical Median Hub Location & Route Problem With Single Assignment)***

**Oleh :**

**Bakti Alpihuda**

**188030013**

**Program Magister Teknik Industri**

**Universitas Pasundan**

**Abstract.** *Dalam penelitain ini mempelajari mengenai masalah penentuan lokasi hub dan masalah perutean. Permasalahan ini terkait erat dengan masalah lokasi hub hierarksi alokasi tunggal yang memilik level jaringan 3 tingkat serta permasalahan perutean kendaraan multidepot, yang dikenal sebagai masalah sulit dan kompleks. Struktur hirarkis jaringan hub tiga tingkat tersebut pada tingkat atas terdiri dari jaringan lengkap yang menghubungkan node central hub, tingkat kedua adalah jaringan bintang yang menghubungkan node hub yang tersisa ke central hub dan pada tingkat ketiga node permintaan dihubungkan ke node hub dan central hub. Untuk menyelesaikan permaslahan tersebut dilakukan dengan mengembangkan model matematis dua tahap untuk permasalahan Capacitated Hierarchical Median Hub Location & Route Problem with Single Assignment (SA-C-MHLRP). Tahap pertama (C-SAMHLP) bertujuan untuk menetukan lokasi central hub, alokasi sub hub ke central hub dan alokasi non hub ke hub dengan biaya paling minimal. Alokasi non hub ke hub yang diperoleh dari tahap pertama akan menjadi inputan model matematis tahap kedua (VRP) untuk menentukan lokal rute atau koneksi langsung yang bisa menghasilkan biaya transportasi minimal. Kedua model matematis tersebut adalah model matematsi Mix Integer Linier Programing (MILP). Studi komputasi untuk menguji model matematis yang dikembangkan berdasarkan set data jumlah titik node berukuran kecil dan sedang. Dalam studi komputasi yang dilakukan, diamati efek dari penentuan jumlah central hub dan diskon factor pada lokasi hub, lama waktu menjalankan model matematis pada software LINGO 18.0, jumlah node nun hub yang dialokasikan untuk tur local dan biaya transportasi secara keseluruhan*

**Keywords**: ***Hierarchical Median Hub Problem*, *Route Problem*, *Location and Route Problem*, MILP, *Metode Dua Tahap***

1. **Pendahuluan**

Dari pengamatan yang dilakukan, fasilitas hub yang digunakan pada jaringan trasnsportasi *many-to-many* seperti pengiriman paket/barang memiliki struktur jaringan hub hirarkis tiga tingkat. Yang mana tingkat atas terdiri dari jaringan lengkap yang menghubugkan central hub, tingkat dua adalah jaringan bintang yang menghubungkan hub level dua ke central hub serta pada tingkat ketiga titik permintaan dihubungkan ke hub level dua dan/atau central hub. Dalam jaringan ini, pertukaran aliran antar titik permintaan dialihkan melalui hub. Pada pengiriman paket kecil, paket dikumpulkan di counter (titik permintaan), diurutkan dan dikonsolidasikan di pusat penyortiran awal (hub lv dua) dan diangkut dengan kendaraan lebih besar ke pusat penyortiran (central hub), lalu di distribusikan ke hub dan counter tujuan. Hub-hub tersebut mengurangi biaya keseluruhan dengan menghasilkan efisiensi volume. Secara umum, system berbasis hub memungkinkan aliran dari node permintaan yang berbeda untuk dikonsentrasikan/ dikonsolidasikan dan di sortir di hub, di transfer antar hub dengan biaya yang lebih rendah per unit aliran dan kemudian didistribusikan ke titik tujuan. Tujuan utama dari masalah lokasi hub hirarkiks adalah untuk menentukan lokasi fasilitas central hub, hub level dua dan mengalokasikan node pelanggan ke hub.

Penelitian terkait masalah lokasi hub hirarkis,memodelkan hubungan langsung antara masing-masing titik permintaan dan hub yang ditugaskan. Lalu lintas dari titik permintaan akan diangkut ke hub (dan sebaliknya) menggunakan satu kendaraan khusus dan tidak ada tur lokal. Namun dalam system transprotrasi *many-to-many* pada perusahaan logistik untuk layanan *Less-Truck Load* (LTL), membangun jaringan hub seperti itu jelas akan meningkatkan total biaya operasional kendaraan, ketika titik pelanggan tidak memiliki cukup permintaan atau volume dibawah kapasitas kendaraan.

Berdasarkan kondisi nyata tersebut, peneliti tertarik untuk membangun model jaringan tiga tingkat yang mempertimbangkan perutean local kendaraan. Model yang bangun memiliki tujuan meminimalisasi biaya pembuakaan hub, biaya aliran trasportasi antar hub, dan biaya operasional tur local kendaraan. Peneliti menyebut model tersebut sebagai *Capacitated Hierarchical Hub Median Location & Route Problem with Single Assignment* (SA-C-HMLRP).

**1.1 Perumusan Masalah**

Perumusan masalah pada penelitian ini adalah

1. Bagaimanakah bentuk model matematis dua tahap yang dapat menyelesaikan permasalahan SA-C-HMLRP ?
2. Berapa besar batas ukuran masalah SA-C-HMLRP yang bisa diselesaikan dengan model matematis dua tahap?

**1.2 Tujuan Penelitian**

Tujuan dari penelitian ini adalah

1. Membangun model matematis dua tahap untuk masalah SA-C-HMLRP
2. Mengetahui batas ukuran permasalahan SA-C-HMLRP yang bisa diselesaikan dengan model matematis dua tahap

**2. Model SA-C-HMLRP**

Jenis penelitian yang dilakukan adalah pemodelan sistem. Sistem yang akan dimodekan yaitu sistem jaringan logistik *Less-Truck Load* (LTL) pada perusahaan kargo/pengiriman barang. Penelitian ini merancang struktur hirarkis jaringn hub tiga tingkat, dimana tingkat atas terdiri dari jaringan lengkap yang menghubungkan node central hub, tingkat kedua adalah jaringan bintang yang menghubungkan node hub yang tersisa ke central hub dan pada tingkat ketiga node permintaan dihubungkan ke node hub dan central hub. Pada tingkat tiga juga ada tur lokal *collection* dan *delivery*. Tujuan dari pemodelan ini adalah untuk meminimalkan total biaya tetap pembukaan hub, total biaya perutean antar hub (lv 1 dan lv 2), biaya tur lokal *collection* dan *delivery* (lv 3) serta biaya tetap penggunaan kendaraan (lv 3). Model jaringan hub tiga tingkat yang dirancanga diilustrasikan pada Gambar 3.2.

Penelitian tentang struktur hierarkis dimotivasi oleh aplikasi dalam pengriman kargo atau ekspedisi khususnya pada perusahaan yang memiliki layanan logistic *Less-Truck Load* (LTL) dimana memuat barang kecil yang terkumpul dari berbagai titik permintaan sehingga untuk meminimalkan biaya operasional kendaraan, kendaraan harus melakukan tur lokal kunjungan dari hub ke node permintaan terdekat lalu ke node permintaan lainnya dan kembali lagi ke hub. Tur lokal kendaraan dibatasi oleh batasan kapasitas kendaraan.

Kriteria yang digunakan untuk membangun model SA-C-HMLRP yaitu :

* Kandidat node hub : merupakan data diskrit di mana hub adalah node yang telah ditentukan
* Nilai parameter : masalah deterministik di mana semua parameter diketahui
* Skema alokasi : alokasi tunggal (*Single Assignment)*
* Fungsi tujuan : *median hub*
* Kapasitas hub: memilik batas kapasitas
* Biaya pembukaan hub: biaya tetap
* Biaya transportasi antara node non-hub dan node hub: biaya variable
* Kapasitas kendaran : memilik batasan kapasitas
* Biya pengguanaan kendaraan : biaya tetap



Gambar 3.2 : Ilustrasi Model *Capacitated Hierarcical Hub Location & Route Problem with Single Assignment* (35 Node, 7 Hub , 4 Central Hub)

**2.1 Model SA-C-HMLRP Dua Tahap**

Untuk memodelkan *Capacitated Hierarchical Hub Median Location & Route Problem with Single Assignment* (SA-C-HMLRP) dilakukan pedekatan dua tahap. Tahap pertama menyelesaikan masalah *Capacitated Hierarchical Hub Location Problem* *with* *Single Assignment* (C-SAHMLP) dan tahap kedua menyelesaikan *Capacitated Vehicle Routing Problem* (C-VRP) untuk setiap hub yang dibuka. Dengan menemukan solusi pada masing-masing tahap maka akan memberikan solusi untuk SA-C-HMLRP.

Pengembangan Model C-SAHMLP tahap pertama terinspirasi dari model Yaman (2008) dan M.Karimi dkk (2014). Tujuan tahap pertama ini yaitu untuk memperoleh minimal biaya tetap lokasi hub yang dibuka, biaya transfer dari hub level 2 ke central-hub dan biaya transfer antar central-hub. Pada tahap kedua, lokasi hub dan skema alokasi diambil dari solusi pada tahap pertama. Untuk model C-VRP pada tahap kedua berdasarkan pada model VRP kasik, menjadwalkan rute pengiriman (*delivery*) dan pengambilan (*collection*) untuk himpunan hub yang dibuka. Kedua model VRP *collection* dan VRP *delivery* didasarkan pada batasan perutean *collection* dan perutean *delivery* yang terinspirasi oleh Kara dkk (2007) serta Toth dan Vigo (2014). Tahap kedua bertujuan untuk meminimalkan biaya perutean *collection* dan *delivery* serta biaya penggunaan kendaraan untuk himpunan hub teripih.

Gambar 3.3 : Tahapan skema pembangunan model dua tahap SA-C-HMLRP

**SA-C-HMLRP**

**C-SAHMLP**

Skema Hub Location :

,

Skema alokasi non-hub :

,

Skema transfer aliran Inter-hub :

,

**VRP**

Untuk himpunan hub j yang dibuka,

=1,

*Collection* VRP

*Delivery* VRP

,

,

Biaya Tetap Hub

Biaya Transfer Inter-Hub

Biaya *Collection*

Biaya *Delivery*

Biaya Tetap Kendaraan

Diuraikan

Tahap 2

Tahap 1

**Solusi dari**

**SA-C-HMLRP**

**Total Biaya dari**

**SA-C-HMLRP**

Gambar 3.3 menyajikan ilustrasi skema pendekatan dua tahap. Di notasikan adalah himpunan demand point, adalah himpunan titik potensial hub level dua dan , adalah himpunan titik potensial hub level pertama (central hub). Diasumsikan variable merupakan jumlah aliran node sebagai asal atau tujuan yang bergerak diantara hub dan central hub dan menunjukkan jumlah aliran node sebagai asal yang melakukan perjalanan dari central hub ke central hub . menunjukkan variable keputusan biner (0-1) node i dialokasikan ke hub dan hub j dialokasikan ke central hub , =1 dan =1 menandakan hub dan central hub dibuka. Jika dibuka sebagai hub maka kapasitas hub level pertama dan hub level kedua dinotasikan oleh dan . mewakili varibel keputusan biner (0-1) untuk rute kendaraan dan mewakili variabel muatan kendaran.

Pada solusi tahap pertama SA-C-HMLP akan didapatkan himpunan hub dibuka, yang mana didefinisikan sebagai , himpunan demand point , yang mana node demand dialokasikan ke hub . Maka untuk tahap kedua, untuk setiap hub dibuka , =1, untuk node demand dialokasikan ke hub j, =1. Rute *collection* dan rute *delivery* untuk setiap hub j dibuka kemudian dijadwalkan dalam proses terpisah dengan cara menyelesaikan VRP *collection* dan VRP *delivery*.

Keputusan dari C-SAHMLP dan dua CVRP ini merupakan solusi dari SA-C-HMLRP. Dengan demikian, akan diperoleh biaya tetap dari lokasi hub, dan biaya transfer antar-hub dari tahap pertama. Pada tahap kedua memperoleh biaya menggunakan kendaraan, biaya rute *collecting* dan *delivery*. Sehingga total biaya tersebut merupakan total biaya SA-C-HMLRP.

**2.1.1 Tahap Pertama : Model C-SAHMLP**

Seperti yang dinyatakan sebelumnya, tahap pertama berkaitan dengan *Capacitatd Hirearcical Hub Location Problem* (C-SAHMLP), menangani lokasi fasilitas hub dan pengalokasian pelanggan ke hub. Ini mengasumsikan bahwa permintaan pelanggan harus dilayani oleh hanya satu hub terbuka dengan kapasitas dan biaya tetap pembukaan hub. Hub pada model ini ada dua jenis dan jaringan tiga level dimana tingkat atas menghubungkan hub pusat dengan jaringan lengkap, tingkat kedua menghubungkan hub yang tersisa ke central hub melalu jaringan bintang dan tingkat ketiga menghubungkan node permintaan ke hub jaringan bintang. Pengiriman asal ke tujuan dapat ditransfer paling banyak melalui empat hub. Transportasi langsung diatur antara hub dan pelanggan, dan tidak ada tur lokal yang dipertimbangkan. Model C-SAHMLP didasarkan pada pembatas lokasi hirearchical hub (3.2)-(3.12) terisnpirasi dari model *Hierarchical Hub Median Problem with Single Assignment* (Yaman, 2007) dan dari model *Capacitated Single Allocation Hub Location Problem with a Hierarchical Approach* (M.Karimi dkk, 2014). Masalah ini didefinisikan pada grafik lengkap di mana adalah himpunan node dan adalah himpunan simpul. Himpunan dan parameter dijelaskan sebagai berikut:

**Himpunan**

– Himpunan node central hub, ;

– Himpunan node hub, ;

– Himpunan node pelanggan, ;

– Himpuan dari semua node, ;

– Himpunan simpul,

**Parameter**

– Biaya tetap pembukaan hub ;

– Kapasias sub hub ;

– Kapasitas central hub ;

– Jumlah aliran dari asal ke tujuan ;

– Jarak antara dua node dan , simpul ( ;

– Diskon factor transfer hub level dua ke central hub ;

– Diskon factor transfer antara central hub ;

– Total jumlah aliran dari asal ke tujuan , ;

**Variabel**

– jumlah arliran dari node yang bergereak dari hub ke central hub

– jumlah ariran dari node yang bergerak dari central hub ke central hub

– bernilai 1, jika node dialokasikan ke hub dan hub dialokasikan ke central

hub

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | (3.1) |
| Subject to | |  |
|  |  | (3.2) |
|  |  | (3.3) |
|  |  | (3.4) |
|  |  | (3.5) |
|  |  | (3.6) |
|  |  | (3.7) |
|  |  | (3.8) |
|  |  | (3.9) |
|  |  | (3.10) |
|  |  | (3.11) |
|  |  | (3.12) |
|  |  | (3.13) |
|  |  | (3.14) |
|  |  | (3.15) |

Pada persamaan (3.1) menunjukan fungsi objektif dari model SA-C-MHLP, total biaya tetap hub yang dibuka, total biaya transfer dari hub ke central hub dan total biaya transfer antar central hub. Persamaan (3.2) menjamin bahwa setiap node permintaan dialokasikan untuk satu hub dan satu central hub. Persamaan (3.3) menunjukkan bahwa jika node terhubung ke hub dan cental hub , maka node harus hub yang terhubung ke central hub . Persamaan (4) menjamin jika node dialokasikan ke central hub , maka menjadi central hub. Jumlah hub dan central hub ditentukan dengan notasi dan yang diperlihatkan dalam persamaan (3.5) dan (3.6). Jika node dialokasikan ke central hub , maka lalu lintas dari node ke node yang dialokasikan ke central hub lainnya meninggalkan node , Jika tidak alokasikan ke central hub , maka lalu lintas dari node ke node yang dialokasikan ke hub pusal mamasuki node . Aliran lalu lintas tersebut dirumuskan dalam pesamaan (3.7) dan (3.14). Dalam persamaan (3.8) yang diambil dari ide Correia, batas atas untuk jumlah lalu lintas antara hub dan central hub, serta central hub dengan central hub lainnya dipertimbangkan. Dalam persamaan (3.9) dan (3.13), jumlah aliran ditentukan oleh variable alokasi. Lalu lintas yang berdekatan di node dan perjalanan antara hub node dan central hub adalah lalu lintas antara node dan node yang tidak ditugaskan ke hub jika node ditugaskan ke hub dan central hub . Jika tidak, jumlah ini adalah nol. Perhatikan di sini bahwa lalu lintas antara node dan tidak melakukan perjalanan dari hub ke central hub jika ditugaskan ke hub . Persamaan (3.10) menentukan kemampuan maksimum untuk memperkirakan nilai demand yang terkumpul pada hub tingkat kedua untuk setiap lokasi ̨ parameter kapasitas hub dinotasikan dengan yaitu kapasitas tersedia pada hub. Persamaan (3.11) menentukan kemampuan maksimum untuk memperkirakan nilai demand yang terkumpul pada hub tingkat pertama (central hub) untuk setiap lokasi ̨ parameter kapasitas central hub dinotasikan dengan yaitu kapasitas tersedia pada central hub. Dan batasan (3.15) memungkinkan ada atau tidak adanya alokasi tiga tingkat.

**2.1.2 Tahap Kedua : Model VRP**

Berdasarkan lokasi hub dan skema alokasi untuk setiap hub terbuka dari tahap pertama, pada tahap kedua menentukan rute *collection* dan *delivery* serta meminimalkan biaya perutean untuk setiap hub terbuka dengan cara memecahkan VRP *collection* yang berbeda dan VRP *delivery*. Dengan demikian untuk setiap hub terbuka memiliki satu model CVRP *collection* dan satu model VRP *delivery*. Model dari dua VRP tersebut didasarkan pada batasan rute *collection* dan rute *delivery* pada model *Mix Integer Linier Programming* (MILP) global yang terinspirasi oleh Kara dkk (2007) serta Toth dan Vigo (2014).

Karena model VRP *collection* dan VRP *delivery* untuk setiap hub terbuka diselesaikan secara terpisah dan modelnya sama, maka hanya ditampilkan model VRP *collection*. Diasumsikan bahwa adalah himpunan hub yang terbuka, adalah hipunan pelanggan yang dialokasikan ke hub , , yang berarti bahwa nilai selalu bernilai 1. Untuk hub terbuka j dan himpunan di dimodelkan pada VRP *collection* berikut :

**Model VRP *Collection***

**Himpunan**

– Himpunan node hub terpilih,

– Himpunan node pelanggan hub j

– Himpuan dari semua node, ;

– Himpunan simpul,

**Parameter**

– Biaya Tetap kendaraan ;

– Kapasitas kendaraan ;

– Jumlah aliran dari asal ke tujuan ;

– Jarak antara dua node dan , simpul ( ;

– Biaya per unit tur kendaraan ;

– Total jumlah aliran dari asal ke tujuan , ;

**Variabel**

– bernilai 1 jika kendaraan perpindah dari node ke node dan jika sebaliknya

bernilai 0

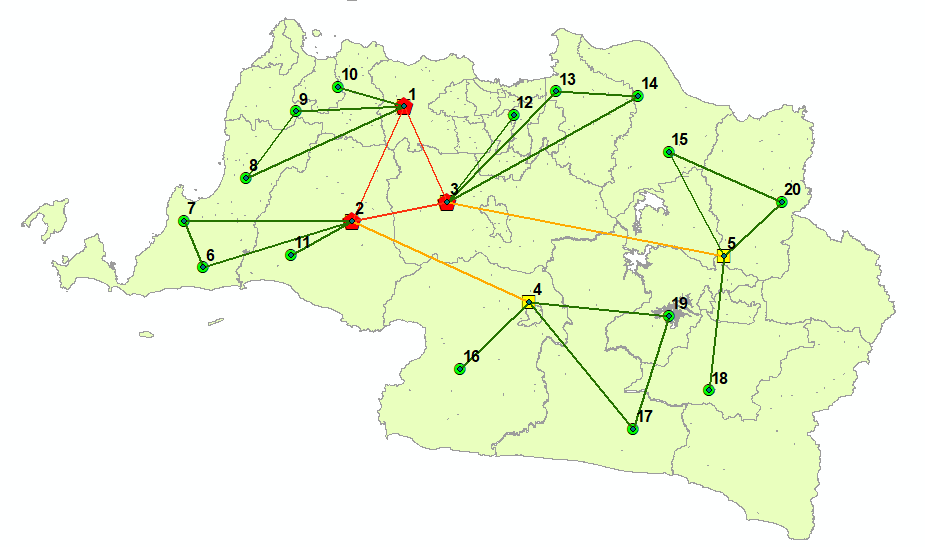
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | | (3.16) |
| Subject to | |  |
|  |  | (3.17) |
|  |  | (3.18) |
|  |  | (3.19) |
|  |  | (3.20) |
|  |  | (3.21) |
|  |  | (3.22) |
|  |  | (3.23) |
|  |  | (3.24) |
|  |  | (3.25) |
|  |  | (3.26) |
|  |  | (3.27) |
|  |  | (3.28) |

Fungsi tujuan (3.16) meminimalkan rute *collection* untuk hub dan biaya penggunaan kendaraan. Batasan (3.17) sampai dengan (3.24) terinspirasi berdsarakan batasan VRP yang diusulkan oleh Kare dkk (2007) serta Toth dan Vigo (2014). Dimana Batasan (3.17) menjamin bahwa setiap pelanggan hanya dikunjung satu kali. Batasan (3.18) menjamin bahwa jumlah kendaraan yang masuk dan keluar hub jumlahnya sama. Batasan (3.19) memastikan setiap kali kendaraan melayani pelanggan harus memuat semua permintaannya. Batasan (3.20) memastikan bahwa total beban *collection* yang memasuki hub sama dengan total permintaan pelanggan yang dialokasikan ke hub. Batasan (3.21) dan (3.22) memberikan nilai batas atas dan bawah untuk alur *collection*. Pembatas (3.24) menjamin bahwa beban pada setiap kendaraan adalah nol ketika meninggalkan hub untuk *collection*. Batasan (3.25) dan (3.26) mendifinisakn aliran *collection* variable dan keputusan perutean 0-1 variabel . Persamaan (3.27) merupaakn *valid inequality* untuk menghilangkan sub-tour kendaraan dan persamaan (3.28) juga merupakan *valid inequlity* memberikan nilai batas bawah jumlah kendaraan yang dibutuhkan.

Karena untuk setiap hub dibuka, dua model VRP dibangun dan diterapkan secara terpisah, total biaya perutean satu hub dibuka adalah jumlah biaya *collecting* dan biaya *delivery* yang diperoleh. Model VRP ini diterapkan pada semua hub dibuka dari tahap pertama. Sehingga, akan didapatkan total biaya *collection* dan *delivery* dari semua hub yang dibuka.

1. **Computatonal Experiment**

Gambar 4.3 menunjukan solusi optimal dari parameter n = 20 dengan jumlah kandidat central hub (CH) =4, , ,, . Hasil solusi optimal pada tahap pertama dapat diketahui node 2 dan 3 terpilih sebagai lokasi central hub serta alokasi node sub hub dan non hub ditunjukan pada tabel 4.1. Output dari tahap pertama tersebut akan menjadi input data pada tahap kedua untuk mengetahui rute local yang memberikan biaya paling rendah. Pada tahap kedua diperoleh rute lokal yang paling optimal untuk setiap hub seperti yang ditunjukan pada tabel 4.2.



Gambar 4.3 Ilustrasi soolusi optimal untuk set data n = 20 dengan kandidat CH = 4 , ,,

Tabel 4.1 Alokasi node sub hub dan node non hub pada n = 20,,

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Node Hub** | **Central Hub Location** | **Sub Hub Allocation** | **Non Hub Allocation** |
| 1 | 1 | - | (8-1), (9-1), (10-1) |
| 2 | 2 | - | (6-2, (7-2), (11-2) |
| 3 | 3 | - | (12-3), (13-3), (14-3), |
| 4 | - | (4-2) | (16-4), (17-4), (19-4) |
| 5 | - | (5-3) | (15-5), (20-5), (18-5) |

Tabel 4.2 Local route setiap hub pada n = 20,,

|  |  |
| --- | --- |
| **Hub Location** | **Local Route** |
| 1 | (1-8-9-1), (1-10-1), |
| 2 | (2-7-6-2), (2-11-2) |
| 3 | (3-12-3), (3-14-13-3) |
| 4 | (4-16-4), (4-19-17-4) |
| 5 | (5-15-20-5), (5-18-5) |

*Computational Experiment* yang dilakukan menggunakan beberapa set data dan dibuat skenario untuk meguji kapabilitas dari Model matematis duat tahap yang dikembangkan. Skenario yang ditetapkan yaitu berdasarkan nilai faktor diskon (), jumlah node n, dan jumlah central hub yang dibuka . Adapun hasil komputasi dari skenario set data yg dibuat ditunjukan pada tabel 4.3 dan tabel 4.4.

Tabel 4.3 memperlihatkan hasil optimasi fungsi tujuan miminal cost dari model matematis dua tahap dan Tabel 4.3 memperlihatkan lokasi node central hub yang terpilih, alokasi node sub hub ke central hub yang terpilih, alokasi node non hub ke central hub dan sub hub, serta rute lokal pada setiap hub.

Hasil komputasi model matematis dua tahap yang dilakukan menghasilkan solusi global optimal dan tidak ada yang infeasible. Untuk melihat sebesar apa peningkatan atau penurunan total cost antara setiap pasangan skenario, diasumsikan nilai *cost* pembanding (*basic cost*) berdasarkan nilai p0 terbesar pada setiap node n. Dimana setiap skenario akan dibandingkan persentase peningkata atau penurunan cost berdasarkan persamaan :

Tabel 4.3 Nilai fungsi objektif pada setiap set data

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **C-SAMHLP (TAHAP 1)** | | | | | |  | **VRP (TAHAP 2)** |  | **SA-C-MHLRP** |
| **n** |  |  | **(,)** | **Objective Value** | **Run Time** |  | **Objective Value** |  | **Total Objetive Value** |
| 20 | 5 | 2 | (0.8,0.8) | 60879,11 | 7,7 |  | 830,6548 |  | 61709,7648 |
| (0.8,0.7) | 60355,75 | 5,86 |  | 830,6548 |  | 61186,4048 |
| 3 | (0.8,0.8) | 67842,04 | 16,2 |  | 858,0156 |  | 68700,0556 |
| (0.8,0.7) | 66334,94 | 9,38 |  | 858,0156 |  | 67192,9556 |
| 4 | (0.8,0.8) | 75941,36 | 14,33 |  | 843,2076 |  | 76784,5676 |
| (0.8,0.7) | 73576,91 | 6,04 |  | 843,2076 |  | 74420,1176 |
| 35 | 10 | 8 | (0.8,0.8) | 188380,9 | 282,05 |  | 1126,9848 |  | 189507,885 |
| (0.8,0.7) | 176304,3 | 444,62 |  | 1126,9848 |  | 177431,285 |

Tabel 4.4 Lokasi dan Allokasi node pada setiap set data

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **SA-C-MHLRP** | | | | | | | |
| **C-SAMHLP (TAHAP 1)** | | | | | | | **VRP**  **(TAHAP 2)** |
| **(ah,ac)** | **n** | **p** | **p0** | **Central**  **Hub Location** | **Sub Hub Allocation** | **Non Hub Allocation** | **Local Route**  **(Collection= Delivery)** |
| (0.8,0.8) (0.8,0.7) | 20 | 5 | 2 | 2,3 | 1-2  4-2  5-2 | 6-2, 7-2, 8-1, 9-1, 10-1, 11-2, 12-3, 13-4, 14-5, 15-5, 16-4, 17-4, 18-4, 19-4, 20-5 | 1-9-8-1, 1-10-1,2-7-6-2, 2-11-2,3-12-3,4-16-19-13-4, 4-18-17-4,5-15-14-5, 5-20-5 |
| 3 | 1,2,3 | 4-2  5-3 | 6-2, 7-2, 8-1, 9-1, 10-1, 11-2, 12-3, 13-3, 14-3, 15-5, 16-4, 17-4, 18-5,19-4, 20-5 | 1-8-9-1, 1-10-1,2-7-6-2, 2-11-2,3-12-3, 3-14-13-3,4-16-4, 4-19-17-4,5-15-20-5, 5-18-5 |
| 4 | 1,2,3,4 | 5-3 | 6-2, 7-2, 8-2, 9-1, 10-1, 11-3, 12-3, 13-1, 14-5, 15-5, 16-4, 17-4, 18-4, 19-4, 20-5 | 1-9-10-1, 1-13-1, 2-7-6-2, 2-8-2, 3-11-12-3, 4-16-17-4, 4-18-19-4, 5-15-14-5, 5-10-5 |
| 35 | 10 | 8 | 1,2,3,4,  5,6,7,8 | 9-2  10-5 | 11-4, 12-4, 13-4, 14-1, 15-1, 16-6, 17-1, 18-6, 19-5, 20-2, 21-5, 22-7, 23-7, 24-7, 25-6, 26-9, 27-9, 28-8, 29-8, 30-3, 31-9, 32-3, 33-10, 34-10, 35-8 | 1-14-15-1, 1-17-1,2-20-2,3-30-32-3,4-12-11-4, 4-13-4,5-19-21-5,6-16-18-6, 6-25-6,7-22-7, 7-23-24-7,8-29-8,8-35-28-8,9-27-26-9,9-31-9,10-33-34-10 |

**3.1 Efek jumlah lokasi cental hub terhadap cost C-SAMHLP (TAHAP 1)**

Tabel 4.5 %VGAP cost C-SAMHLP (Tahap 1) pada set data n = 20 dalam p0 = (2,3,4)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C-SAMHLP | | | | | **Objective Value** | | **%VGAP** | |
| **n** | **p** | **p0** |  |  | **ah=0,8 ac=0,8** | **ah=0,8; ac=0,7** | **ah=0,8 ac=0,8** | **ah=0,8 ac=0,7** |
| 20 | 5 | 2 | 666 | 666 | 60879,11 | 60355,75 | -19,83% | -17,97% |
| 20 | 5 | 3 | 666 | 1331 | 67842,04 | 66334,94 | -10,67% | -9,84% |
| 20 | 5 | 4 | 666 | 2662 | 75941,36 | 73576,91 | - | - |

Dari tabel diatas dapat dilihat bahwa pada set node n 20, p =5 p0=2 mengalami penurunan biaya rute inter hub dengan nilai diskon faktor (0,8;0,8) sebesar 19.83% sedangkan pada nilai diskon factor (0,8;0,7) turun sebesar 17,97%. Dan untuk set node n 20, p =5 p0=3 mengalami penurunan biaya rute inter hub dengan nilai diskon faktor (0,8;0,8) sebesar 10.83% sedangkan pada nilai diskon factor (0,8;0,7) turun sebesar 9,84%.

Penurunan nilai cost tersebut dapat diartikan bawah dengan jumlah node = 20 pada jumlah kandidat central hub yang bisa dibuka sebanyak 4, semakin sedikit jumlah central hub yang dibuka maka biaya transportasi antar hub, dan biaya fix cost pembukaan hub akan lebih murah. Garafik perbandingan nilai cost terhadap jumlah central hub yang dibuka dapat dilihat pada Gambar 4.4

Gambar 4.4 Grafik Perbandingan nilai cost C-MHLP untuk setiap jumlah central hub yang dibuka pada n = 20 faktor diskon ah, ac = (0,8;0,9), (0,8;0,7)

Untuk perbandingan nilai cost antar set parameter diskon factor dari hasil perhitungan %HGP seperti pada tabel 4.6, diperoleh pada p0 =2, 3, 4 terjadi penurunan cost masing-masing sebesar 0,86 %, 2,22% dan 3,11 %.

Tabel 4.5 %HGAP cost C-SAMHLP (Tahap 1) pada set data n = 20 dalam ah,ac = (0,8;0,8),(0,8;0,7)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **C-SAMHLP** | | | | | **Objective Value** | | **%HGAP** |
| **n** | **p** | **p0** |  |  | **ah=0,8 ac=0,8** | **ah=0,8; ac=0,7** |
| 20 | 5 | 2 | 666 | 666 | 60879,11 | 60355,75 | -0,86% |
| 20 | 5 | 3 | 666 | 1331 | 67842,04 | 66334,94 | -2,22% |
| 20 | 5 | 4 | 666 | 2662 | 75941,36 | 73576,91 | -3,11% |

Nilai %HGAP pada tabel 4.5 diatas dapat diartikan bahwa semakin banyak jumlah central node yang dibuka pada n = 20 maka akan bisa memeberikan nilai biaya yang lebih murah jika kendaraan yang digunakan untuk transfer antara sub hub-central hub lebih kecil biaya operasionalnya dari pada kendaraan yang digunakan untuk tranfer antar central hub.

**3..2 Efek jumlah lokasi cental hub terhadap Run Time C-SAMHLP (TAHAP 1)**

Set data node n = 20 pada 6 skenario komputasi, dan lama waktu komputasi untuk memperoleh nilai solusi optimalnya ditunjukan pada tabel 4.6 dan tabel 4.7.

Tabel 4.6 %VGAP run time C-SAMHLP (Tahap 1) pada set data n = 20 dalam p0 = (2,3,4)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **C-SAMHLP** | | | | | **Run Time (detik)** | | **%VGAP** | |
| **n** | **p** | **p0** |  |  | **ah=0,8 ac=0,8** | **ah=0,8; ac=0,7** | **ah=0,8 ac=0,8** | **ah=0,8**  **ac=0,7** |
| 20 | 5 | 2 | 666 | 666 | 7,7 | 5,86 | -46,27% | -2,98% |
| 20 | 5 | 3 | 666 | 1331 | 16,2 | 9,38 | 13,05% | 55,30% |
| 20 | 5 | 4 | 666 | 2662 | 14,33 | 6,04 | - | - |

Dari tabel diatas dapat dilihat bahwa pada set node n 20, p =5 p0=2 mengalami penurunan waktu komputasi pada nilai diskon faktor (0,8;0,8) sebesar 46,27% sedangkan pada nilai diskon factor (0,8;0,7) turun sebesar -2,97%. Dan untuk set node n 20, p =5 p0=3 mengalami peningkatan waktu komputas pada nilai diskon faktor (0,8;0,8) sebesar 13.05% sedangkan pada nilai diskon factor (0,8;0,7) meningkat sebesar 55,30%.

Lama waktu komputasi pada set data n= 20, p5, p0 = (2,3,4) bisa menghitung nilai solusi optimal diwabah 1 menit. Model C-SAMHLP di tahap pertama masih bisa menghitung dalam kurun waktu yang sangat cepat untuk ukuran jumlah node kecil. Dan lama waktu komputasinya tidak terpengaruhi oleh jumlah central hub yang dibuka. Garafik perbandingan lama waktu komputasi terhadap jumlah central hub yang dibuka dapat dilihat pada Gambar 4.4

Untuk perbandingan waktu komputasi antar set parameter diskon factor dari hasil perhitungan %HGP seperti pada tabel 4.7, diperoleh pada p0 =2, 3, 4 terjadi penurunan waktu komputasi masing-masing sebesar 23,90 %, 4,10% dan 57,85 %.

Gambar 4.5 Grafik Perbandingan waktu komputasi C-SAMHLP untuk setiap jumlah central hub yang dibuka pada n = 20 fator diskon ah, ac = (0,8;0,9), (0,8;0,7)

Tabel 4.7 %HGAP Run Time C-SAMHLP (Tahap 1) pada set data n = 20 dalam ah,ac = (0,8;0,8),(0,8;0,7)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **C-SAMHLP** | | | | | **Run Time (second)** | | **%HGAP** |
| **n** | **p** | **p0** |  |  | **ah=0,8 ac=0,8** | **ah=0,8; ac=0,7** |
| 20 | 5 | 2 | 666 | 666 | 7,7 | 5,86 | -23,90% |
| 20 | 5 | 3 | 666 | 1331 | 16,2 | 9,38 | -42,10% |
| 20 | 5 | 4 | 666 | 2662 | 14,33 | 6,04 | -57,85% |

Nilai %HGAP pada tabel 4.7 diatas dapat diartikan bahwa semakin banyak jumlah central node yang dibuka pada n = 20 maka waktu komputasi untuk memperoleh nilai optimal akan semakin cepat.

**3.3 Efek jumlah lokasi central hub terhadap cost VRP (TAHAP 2)**

Setelah solusi optimal pada tahap pertama diperoleh, output alokasi non hub ke hub menjadi inputan untuk pernentuan lokal rute pada setiap hub. Pada tahap (VRP) ke dua akan dihitung solusi optimal untuk minimal cost rute collection dan delivery yang terjadi pada setipa non hub ik yang dialokasikan pada hub jk. Kapasitas kendaraan yg ditetapkan pada set data node n = 20 adalah Q=500, fix cost kendaaran C = 20 dan biaya rute per jarak yaitu =0.2. Hasil komputasi solusi optimal VRP untuk rute collection dan delivery memiliki nilai yang sama dan total rute collection dan delivery ditunjukan pada tabel 4.8.

Tabel 4.8 %VGAP cost VRP (Tahap 2) pada set data n = 20 dalam p0 = (2,3,4)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **C-SAMHLP (TAHAP 1)** | | | **VRP (TAHAP 2)** | | **%VGAP** |
| **n** | **p** | **p0** | **Q** | **Objective Value** |
| 20 | 5 | 2 | 500 | 1661,3096 | -1,49% |
| 20 | 5 | 3 | 500 | 1716,0312 | 1,76% |
| 20 | 5 | 4 | 500 | 1686,4152 | - |

Dari tabel diatas dapat dilihat bahwa pada set node n=20, p =5 p0=2 Q=500 mengalami penurunan biaya perutean dan fix cost kendaraan sebesar 1,47%. Dan untuk set node n =20, p =5 p0=3 Q= 500 mengalami peningkatan biaya perutean sebesar 1.76%. Untuk set data tersebut dapat disimpulkan bahwa jumlah central hub yang dibuka tidak berpengaruh terhadap peningkatan atau penurunan biaya perutean kendaraan.

**4.2.4 Efek jumlah central hub terhadap total cost SA-C-MHLRP**

Total Solusi optimal dari model C-SAMHLP pada tahap pertama dan Model VRP pada tahap kedua merupakan Solusi Optimal dari Model SA-C-MHLRP. Total Cost Model SA-C-MHLRP untuk n = 5 p0 = (2,3,4) di tunjukan pada tabel 4.9.

Tabel 4.9 %VGAP total cost SA-C-MHLP pada set data n = 20 dalam p0 = (2,3,4)

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **SA-C-MHLRP** | | | | | **Objective Value** | | **%VGAP** | |
| **n** | **p** | **p0** |  |  | **ah=0,8 ac=0,8** | **ah=0,8; ac=0,7** | **ah=0,8 ac=0,8** | **ah=0,8 ac=0,7** |
| 20 | 5 | 2 | 666 | 666 | 61709,7648 | 61186,4048 | -19,63% | -17,78% |
| 20 | 5 | 3 | 666 | 1331 | 68700,0556 | 67192,9556 | -10,53% | -9,71% |
| 20 | 5 | 4 | 666 | 2662 | 76784,5676 | 74420,1176 | - | - |

Dari tabel diatas dapat dilihat bahwa pada set node n 20, p =5 p0=2 menghalami penurunan taotal biaya dengan nilai diskon faktor (0,8;0,8) sebesar 19,63% sedangkan pada nilai diskon factor (0,8;0,7) turun sebesar 17,78%. Dan untuk set node n 20, p =5 p0=3 mengalami penurunan total biaya dengan nilai diskon faktor (0,8;0,8) sebesar 10.53% sedangkan pada nilai diskon factor (0,8;0,7) turun sebesar 9,71%.

Penurunan nilai total cost tersebut dapat diartikan bawah dengan jumlah node = 20 pada jumlah kandidat central hub yang bisa dibuka sebanyak 4, semakin sedikit jumlah central hub yang dibuka maka total biaya dari biaya transportasi antar hub, biaya fix cost pembukaan hub, dan biaya perutean lokal akan lebih murah. Garafik perbandingan nilai cost terhadap jumlah central hub yang dibuka dapat dilihat pada Gambar 4.6.

Untuk perbandingan nilai cost antar set parameter diskon factor dari hasil perhitungan %HGAP seperti pada tabel 4.10, diperoleh pada p0 =2, 3, 4 terjadi penurunan cost masing-masing sebesar 0,85 %, 2,19% dan 3,08 %.

Gambar 4.6 Grafik Perbandingan nilai total cost SA-C-MHLRP untuk setiap jumlah central hub yang dibuka pada n = 20 diskon fator ah, ac = (0,8;0,9), (0,8;0,7)

Tabel 4.10 %HGAP Run Time C-SAMHLP (Tahap 1) pada set data n = 20 dalam ah,ac = (0,8;0,8),(0,8;0,7)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **SA-C-MHLRP** | | | | | **Objective Value** | | **%HGAP** |
| **n** | **p** | **p0** |  |  | **ah=0,8 ac=0,8** | **ah=0,8; ac=0,7** |
| 20 | 5 | 2 | 666 | 666 | 61709,7648 | 61186,4048 | -0,85% |
| 20 | 5 | 3 | 666 | 1331 | 68700,0556 | 67192,9556 | -2,19% |
| 20 | 5 | 4 | 666 | 2662 | 76784,5676 | 74420,1176 | -3,08% |

Nilai %HGAP pada tabel 4.5 diatas dapat diartikan bahwa semakin banyak jumlah central node yang dibuka pada n = 5 maka akan bisa memeberikan nilai total biaya yang lebih murah.

**4. Kesimpulan**

Dalam penelitain ini mempelajari mengenai masalah penentuan lokasi hub dan masalah perutean. Permasalahan ini terkait erat dengan masalah lokasi hub hierarksi alokasi tunggal yang memilik level jaringan 3 tingkat serta permasalahan perutean kendaraan multidepot, yang dikenal sebagai masalah sulit dan kompleks. Struktur hirarkis jaringan hub tiga tingkat tersebut pada tingkat atas terdiri dari jaringan lengkap yang menghubungkan node central hub, tingkat kedua adalah jaringan bintang yang menghubungkan node hub yang tersisa ke central hub dan pada tingkat ketiga node permintaan dihubungkan ke node hub dan central hub.

Pada tingkat tiga, koneksi antara node non hub ke node hub tidak diizinkan melakukan koneksi secara langsung jika kendaraan masih memiliki batas kapasitas yang bisa mengangkut jumlah permintaan pada node noh hub. Kondisi tersebut perlu dilakukan karna jika node non hub terhubung langsung ke node hub akan meningkatkan jumlah kendaraan yang dibutuhkan. Oleh karena itu perlu untuk membangun perutean local diantara node yang dialolasikan ke hub yang sama.

Untuk menyelesaikan permaslahan tersebut dilakukan dengan mengembangkan model matematis dua tahap (SA-C-MHLRP). Tahap pertama (C-SAMHLP) bertujuan untuk menetukan lokasi central hub, alokasi sub hub ke central hub dan alokasi non hub ke hub dengan biaya paling minimal. Alokasi non hub ke hub yang diperoleh dari tahap pertama akan menjadi inputan model matematis tahap kedua (VRP) untuk menentukan lokal rute atau koneksi langsung yang bisa menghasilkan biaya transportasi minimal. Kedua model matematis tersebut adalah model matematsi *Mix Integer Linier Programing* (MILP).

Studi komputasi untuk menguji model matematis yang dikembangkan berdasarkan set data jumlah titik node berukuran kecil dan sedang. Lokasi titik node tersebut ditentukan secara sembarang pada area peta wilaya pulau jawa Indonesia menggunakan software ArcGis 10.3. Dengan menggunakan software ArcGis 10.3 bisa dikatahui jarak antar titik node berdasarkan koordinat peta geografis. Dalam studi komputasi yang dilakukan, diamati efek dari penentuan jumlah central hub dan diskon factor pada lokasi hub, lama waktu menjalankan model matematis pada software LINGO 18.0, jumlah node nun hub yang dialokasikan untuk tur local dan biaya transportasi secara keseluruhan.

Kami melakukan studi komputasi komprehensif set data yang telah dibuat. Dalam studi komputasi, kami mengamati efek dari kapasitas tur lokal, jumlah hub dan faktor diskon pada lokasi hub, waktu CPU, jumlah node yang dialokasikan untuk tur lokal dan yang paling penting pada biaya transportasi global. Hasil komputasi menunjukan model matematis dua tahap yang dikembangkan sesuai dengan model konseptual yang pada penelitan ini. Model matematis dua tapa bisa menyelesaikan permasalahan dengang ukuran node kecil n = 20 dengan waktu yang sangat cepat kurang dari 1 menit. Sedangkan untuk node ukuran sedang n = 35 waktu komputasi membutuhkan waktu 1-2 jam.

Arahan peneltian selanjutnya pada penelitian ini, dapat merubah asumsi jumlah permintaan tidak deterministic tetapi bersifat stokasik. Selain itu, jenis kendaran yang digunakan untuk menghubungkan node sub hub dan node central hub bisa ditentukan dan mungkin untuk menetapkan kapasitas yang berbeda pada koneksi transfer antara sub hub-central hub dan antar central hub. Dalam sundut pandang biaya tranportasi, alih-aliih menggunakan faktor diskon, jumlah dan type kendaraan yang digunakan pada setiap level hub dapat menjadi varibel keputusan.

**DAFTAR PUSTAKA**

1. M. E. O’Kelly, “A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities,” European Journal of Operational Research 32, (1987) 393-404.
2. J. F. Campbell, “Hub location and the p-hub median problem,” Oper Res 44 (1996), 923-935.
3. S. Nagy and S. Salhi, “The many-to-many location-routing problem," TOP, vol. 6, pp. 261 - 277, 1998.
4. J. F. Campbell “Integer programming formulations of discrete hub location problems,” Eur J of Oper Res 1994; 72:387–405.
5. B. Y. Kara and B. C. Tansel, “On the single assignment p-hub center problem,” European Journal of Operation Research, vol. 125, pp. 648-655, 2000.
6. S. Alumur and B. Y. Kara, “Network hub location problems: The state of art,” European Journal of Operation Research, vol. 190, no. 1, pp. 1-21, 2008.
7. T. Meyer, A. T. Ernst, and M. Krishnamoorthy, “A 2-phase algorithm for solving the single allocation p-hub center problem,” Computers & Operations Research, vol. 36, no. 12, pp. 3143-3151, 2009.
8. H. Yaman, “The hierarchical hub median problem with single assignment,” Transportation Res Part B 43 (2009) 643–658.
9. J. F. Campbell and M. E. O’Kelly, “Twenty-five years of hub location research,” Transportation Science, vol. 46, no. 2, pp. 153-169, 2012.
10. M. Wasner and G. Zäpfel, “An integrated multi-depot hub-location vehicle routing model for network planning of parcel service,” International Journal of Production Economics, vol. 90, no. 3, pp. 403-419, 2004.
11. S. Çetiner, C. Sepil and H. Süral, “Hubbing and routing in postal delivery systems,” Annals of Operation Research, vol. 181, no. 1, pp. 109-124, 2010.
12. R. S. de Camargo, G. de Miranda and A. Løkketangen, “A new formulation and an exact approach for the many-to-many hub location-routing problem,” Applied Mathematical Modelling, vol. 37, no. 12-13, pp. 7465-7480, 2013.
13. R. Sahraeian and E. Korani, “The hierarchical hub maximal covering problem with determinate cover radiuses,” IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management, IEEM 2010, Macao, China, pp. 13291333,7-10 December 2010.
14. Okan Dukkaci, “Routing and scheduling decision in the hierarchical hub location problem”, Thesis Industrial Engineering of Bilkent University, 2013
15. Sanin Bayraktar, “Hub location and routing problem”, Thesis Industrial Engineering of Bilkent University, 2016
16. Xiao Yang, Nathalie Bostel, Pierre Dejax, “ A MILP model and memetic algorithm of the hub location and routing problem with distinct collection and delivery tour”, Elsevier Jurnal, 2019
17. M. Karimi, A.R Eydi, E. Korani, “Modeling of the Capacitated Single Allocation Hub Location Problem with Hierarchical Approach”, IJE Transactions a basic Vol 27, No. 4, April 2014