

BAB II

KAJIAN TEORETIS

A. Kajian Teori

1. Pembelajaran Matematika

Tanda dari seseorang belajar adalah perubahan. Perubahan tersebut adalah akumulasi dan hasil dari proses belajarnya. Walaupun pada hasil akhirnya ketika seseorang belajar perubahan yang signifikan belum tentu tercapai karena belajar merupakan proses yang harus dilakukan terus menerus dalam jangka waktu secara konsisten. Selain dari pada itu hasil yang baik dapat ditentukan karena kualitas belajar yang baik juga.

Pembelajaran merupakan suatu usaha yang sengaja dilakukan agar terjadi suatu perubahan yang diharapkan baik saat proses pembelajaran berlangsung ataupun setelahnya. Suherman (2003, hlm. 8) mengartikan, “Pembelajaran sebagai upaya penataan lingkungan yang memberi nuansa agar program belajar tumbuh dan berkembang secara optimal”.

Matematika adalah cara untuk menemukan suatu pemecahan masalah baik dalam pembuktian secara logika dan diolah secara kuantitatif maupun secara kualitatif. Matematika menurut Suherman (2003, hlm. 253), “Matematika adalah disiplin ilmu tentang tata cara berfikir dan mengolah logika, baik secara kuantitatif maupun secara kualitatif”.

Matematika adalah ilmu yang dapat mengembangkan pola berpikir, hubungan, struktur, ide dan konsep dengan pembuktian yang logis untuk membantu manusia dalam mengatasi permasalahannya. Ruseffendi (2006, hlm. 260) mendefinisikan “matematika sebagai hasil pemikiran manusia berhubungan dengan ide, proses, dan penalaran menggunakan simbol, notasi atau lambang yang seragam yang dapat dipahami matematikawan diseluruh dunia”. Selain itu, Freudenthal (Darta, 2012, hlm. 133) berpendapat bahwa matematika sebaiknya tidak dipandang sebagai suatu bahan ajar yang harus ditransfer kepada siswa dalam bentuk jadi, tetapi harus dipandang sebagai suatu aktivitas manusia (*human activity*).

Pembelajaran dalam matematika atau disebut sebagai pembelajaran

matematika merupakan suatu usaha yang sengaja dilakukan agar terjadi suatu perubahan dalam matematika yang diharapkan baik saat proses pembelajaran berlangsung ataupun setelahnya sehingga terbentuk suatu kemampuan yang mampu mengatasi setiap masalah matematika ataupun masalah matematika yang berhubungan dalam kehidupan sehari-hari. Namun, secara sadar pembelajaran matematika di sekolah selalu dianggap sulit dan tidak disukai oleh setiap siswa. Sama seperti pendapat yang diungkapkan oleh Jusniani (2012, hlm. 114), pembelajaran matematika merupakan salah satu pelajaran pokok yang secara umum dianggap sulit karena mata pelajaran ini bersifat eksak, abstrak dan memerlukan keterampilan dan kecakapan daya nalar yang kuat, serta kemampuan pemahaman konsep matematika. Beberapa hal pendukung seperti keterampilan, kecakapan daya nalar yang kuat, dan kemampuan pemahaman konsep matematika dapat membantu mengatasi kesulitan dalam pembelajaran matematika. Dengan ketiga hal tersebut siswa akan memiliki berbagai pola pikir untuk dapat memecahkan suatu permasalahan matematika.

Berdasarkan uraian di atas maka dapat disimpulkan bahwa pembelajaran matematika adalah upaya sadar yang dilakukan untuk mengembangkan disiplin ilmu seperti tata cara berpikir atau pola berpikir, pola mengorganisasi, membuktikan dengan logik baik secara kuantitatif maupun secara kualitatif, memilih bahasa yang tepat, dan mengakuratkan representasi dengan simbol dan padat.

2. Model *Problem-Based Learning*

Model *Problem-Based Learning* merupakan model pembelajaran berbasis masalah dimana siswa di hadapkan pada masalah-masalah. Dalam model pembelajaran ini siswa di arahkan untuk melihat masalah sebagai jalan dalam melaksanakan pembelajaran.

Menurut Juandi (Rahadyan, 2011, hlm.12), *Problem-Based Learning* adalah sebagai berikut:

Pembelajaran berbasis masalah *Problem-Based Learning* adalah suatu model pembelajaran yang menantang siswa untuk berpikir dan memecahkan masalah yang dirancang agar siswa dapat menyelidiki

situasi, mengembangkan pertanyaan, merencanakan penyelesaian, menggali konsep dan prinsip melalui penelaahan terhadap masalah yang dihadapinya.

Pembelajaran ini merupakan pembelajaran yang mengarahkan siswa dan merangsang siswa untuk berpikir kritis dalam mencari solusi atau penyelesaian masalah dari masalah-masalah yang diberikan dimana guru merupakan fasilitator atau hanya sebagai pembimbing dengan kata lain sebagai pengarah yang mengarahkan siswa. Wahyuni (2016, hlm. 41) mengatakakan bahwa “Pembelajaran dengan model PBM dimulai dengan adanya masalah (dapat dimunculkan oleh siswa atau guru), kemudian siswa memperdalam pengetahuannya tentang apa yang perlu mereka ketahui untuk memecahkan masalah tersebut”.

Adapun tahapan-tahapan dari model pembelajaran *problem based learning* adalah sebagai berikut:

Tabel 2.1
Tahapan-tahapan Model *Problem Based Learning*

FASE-FASE	PERILAKU GURU
Fase 1 Orientasi siswa pada masalah	<ul style="list-style-type: none"> • Menjelaskan tujuan pembelajaran, menjelaskan logistik yang dibutuhkan • Memotivasi siswa untuk terlibat aktif dalam pemecahan masalah yang dipilih
Fase 2 Mengorganisasikan siswa	Membantu siswa mendefinisikan dan mengorganisasikan tugas belajar yang berhubungan dengan masalah tersebut
Fase 3 Membimbing Penyelidikan Individu	Mendorong siswa untuk mengumpulkan informasi yang sesuai, melaksanakan eksperimen untuk mendapatkan penjelasan dan pemecahan masalah
Fase 4 Mengembangkan dan menyajikan hasil karya	Membantu siswa dalam merencanakan dan menyiapkan karya yang sesuai seperti laporan, model dan berbagai tugas dengan teman
Fase 5 Menganalisa dan mengevaluasi proses pemecahan masalah	Mengevaluasi hasil belajar tentang materi yang telah dipelajari/meminta kelompok presentasi hasil kerja

Sumber: Hosnan (2014)

Berikut ini merupakan penggambaran dalam bentuk gambar mengenai langkah-langkah dari model pembelajaran ini.



Gambar 2.1

Langkah *Problem-Based Learning*

Menurut Berliana (2016, hlm. 24), *Problem Based Learning* merupakan pendekatan yang menggunakan masalah sebagai langkah awal dalam mengumpulkan dan mengintegrasikan pengetahuan baru. Masalah tersebut didasarkan dengan kemampuan dan pengetahuan yang dimiliki oleh siswa.

Setiap masalah yang diberikan oleh guru kepada murid merupakan masalah sehari-hari yang dapat memberikan wawasan kepada siswa untuk mampu berpikir lebih luas dan mengaplikasikannya dengan memilih cara-cara yang tepat untuk memecahkan masalah. Menurut Barrows (Liu, 2005), pembelajaran *problem-based learning* memiliki karakteristik sebagai berikut:

- a. Pembelajaran yang berpusat pada siswa,
- b. Membentuk masalah otentik untuk fokus pada belajar,
- c. Informasi baru diperoleh melalui belajar secara mandiri,
- d. Belajar terjadi dalam kelompok kecil, dan
- e. Kelompok bertindak sebagai fasilitator.

Sebagai suatu model pembelajaran terdapat kelebihan dan kelemahan yang ada dalam model tersebut. Berikut ini merupakan kelebihan dari model *Problem-Based Learning* menurut Sanjaya (2007), yaitu:

1. Menantang kemampuan siswa serta memberikan kepuasan untuk menemukan pengetahuan baru bagi siswa.
2. Meningkatkan motivasi dan aktivitas pembelajaran siswa.
3. Membantu siswa dalam mentransfer pengetahuan siswa untuk memahami masalah dunia nyata.

4. Membantu siswa untuk mengembangkan pengetahuannya dan bertanggung jawab dalam pembelajaran yang mereka lakukan. Disamping itu, *Problem-Based Learning* dapat mendorong siswa untuk melakukan evaluasi sendiri baik terhadap hasil maupun proses belajarnya.
5. Mengembangkan kemampuan siswa untuk berpikir kritis dan mengembangkan kemampuan mereka untuk menyesuaikan dengan pengetahuan baru.
6. Memberikan kesempatan bagi siswa untuk mengaplikasikan pengetahuan yang mereka miliki dalam dunia nyata.
7. Mengembangkan minat siswa untuk secara terus menerus belajar sekalipun belajar pada pendidikan formal telah berakhir.
8. Memudahkan siswa dalam menguasai konsep-konsep yang dipelajari guna memecahkan masalah dunia nyata.

Kemudian berikut ini merupakan kelemahan dari model *Problem-Based Learning* menurut Sanjaya (2007), diantaranya:

1. Manakala siswa tidak memiliki minat atau tidak mempunyai kepercayaan bahwa masalah yang dipelajari sulit untuk dipecahkan, maka mereka akan merasa enggan untuk mencobanya.
2. Untuk sebagian siswa beranggapan bahwa tanpa pemahaman mengenai materi yang diperlukan untuk menyelesaikan masalah mengapa mereka harus berusaha untuk memecahkan masalah yang sedang dipelajari, maka mereka akan belajar apa yang mereka ingin pelajari.

Berdasarkan penjelasan diatas maka model *problem-based learning* adalah model pembelajaran dengan masalah dimana siswa dihadapkan pada suatu masalah yang sesuai dengan kemampuan dan pengetahuannya. Guru tidak memberikan konsep matematika dalam bentuk yang utuh melainkan sudah menjadi bentuk masalah-masalah yang harus dicari penyelesaiannya oleh siswa.

3. Penggunaan Pendekatan dalam Pembelajaran

Pendekatan merupakan salah satu komponen dari beberapa upaya guna meningkatkan kualitas pendidikan. Ruseffendi (2006, hlm. 240) menyatakan bahwa, "Pendekatan adalah suatu jalan, cara atau kebijaksanaan yang ditempuh oleh guru atau siswa dalam pencapaian tujuan pengajaran dilihat dari sudut bagaimana proses pengajaran atau materi itu, umum atau khusus di sekolah."

Hambatan disaat proses pembelajaran berlangsung tidak terduga. Hal tersebut akan mempengaruhi tercapai atau tidaknya tujuan pembelajaran. Artinya diperlukan suatu upaya yang bijaksana untuk menanggulangi hambatan-hambatan

yang mungkin terjadi. Maka, dari itu diperlukan suatu cara yang bijaksana dalam memecahkan hambatan pembelajaran tersebut. Suatu pendekatan dalam pembelajaran adalah salah satu upaya yang bijaksana dilakukan untuk mencapai tujuan pembelajaran dilihat dari bagaimana proses pembelajaran itu sendiri atau dari materi pembelajarannya yang merupakan khusus atau umum.

4. Pendekatan *Rigorous Mathematical Thinking*

Pendekatan *Rigorous Mathematical Thinking* didasari oleh teori peralatan Vygotsky dan teori *Mediated Learning Experience* Feurstein menurut Kinard dan Konzulin (Munirah, 2014, hlm. 16). Merupakan salah satu pendekatan dari beberapa pendekatan-pendekatan yang berkembang saat itu. Pendekatan yang bisa dijadikan pilihan dalam usaha meningkatkan kemampuan siswa. Disamping banyaknya pendekatan-pendekatan yang dapat dipilih dan juga berkembang pada saat itu.

Pengetahuan merupakan sesuatu yang berasal dari hasil penggalian informasi yang berkombinasi dengan pemahaman. Menurut Hanum, dkk. (Munirah, 2014, hlm. 16) dikatakan bahwa Vygotsky adalah pelopor teori belajar konstruksi sosial yang menegaskan bahwa perkembangan pengetahuan siswa berasal dari interaksi dengan lingkungan sosialnya, baru kemudian proses internalisasi yang terjadi dalam diri sendiri. Berdasarkan teori peralatan Vygotsky tersebut dapat dikatakan bahwa pengetahuan berasal dari proses interaksi sosial dan proses internalisasi yang terjadi pada diri sendiri.

Dengan berdasar pada proses interaksi sosial dan proses internalisasi Vygotsky (Cahyono, 2010) mengungkapkan bahwa terdapat dua konsep penting dalam teori ini, yaitu *Zone of Proximal Development* dan *Scaffolding*. Munirah (2014, hlm. 16) mengatakan bahwa:

Zone of Proximal Development dalam teori ini adalah celah antara kemampuan pemecahan masalah secara mandiri (tingkat perkembangan sesungguhnya) dan kemampuan pemecahan masalah di bawah bimbingan orang lain (tingkat perkembangan potensial). Ketika guru membantu peserta didik untuk belajar mengerjakan sesuatu yang tidak bisa dikerjakan tanpa bantuan guru, maka peserta didik berada pada *Zone of Proximal Development*.

Berdasarkan penjelasan tersebut dapat dijelaskan bahwa siswa pada saat proses pembelajaran berlangsung diperlukan suatu bantuan berupa bimbingan dari orang dewasa atau orang-orang yang lebih dalam pengetahuannya disebut sebagai

orang yang kompeten/ahli.

Untuk *Scaffolding* dalam teori ini merupakan suatu pemberian bantuan secara bertahap pada siswa bantuan tersebut dimulai dari tahap awal namun akan berkurang seiring berjalannya proses pembelajaran sehingga memberikan kesempatan kepada siswa untuk mampu bertanggungjawab dan mengerjakannya sendiri Cahyono (2010). Berdasarkan penjelasan tersebut dapat disimpulkan bahwa siswa akan menerima bantuan dalam rangka mengembangkan kemampuan awalnya.

Untuk teori *Mediated Learning Experience* adalah teori belajar yang dikemukakan oleh Feurstein diungkapkan (Budiarto, dkk, 2013). Teori ini adalah salah satu teori yang mendasari pendekatan *Rigorous Mathematical Thinking*. Sesuatu yang mendasari merupakan landasan yang dijadikan suatu patokan dalam menentukan suatu keputusan atau tindakan. Teori yang mendasari dapat dijadikan batasan untuk menjaga agar keutuhan suatu pemikiran tetap terjaga walaupun dikombinasikan saat akan diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari. Terdapat beberapa mediator dalam pendekatan ini, yaitu mediator yang dikemukakan oleh (Munirah, 2014, hlm. 20).

dalam hal ini perlu membimbing dan memelihara mediasi menggunakan tiga kriteria pokok, yaitu: (1) mediasi intensionalitas dan timbal balik, mediator perlu menyampaikan tujuan dan arah interaksi; (2) Mediasi transedensi, mediator menjembatani pertemuan dengan isu-isu yang lebih luas tentang pengalaman dan makna masa depan; dan (3) mediasi makna, mediator menanamkan pertemuan dengan pentingnya dan relevansinya perasaan dan aktivitas, mengidentifikasi dan menetapkan alasan interaksi.

Pendekatan *Rigorous Mahtematical Thinking* dalam pembelajaran menggunakan tiga fase dengan enam langkah proses menurut Kinard dan Konzulin (Munirah, 2014, hlm. 20), sebagai berikut:

Fase I : Pengembangan Kognitif (*Cognitif Development*)

Langkah-langkahnya:

1. Siswa dimediasi untuk menyesuaikan model dalam tugas kognitif sebagai peralatan psikologis umum.
2. Siswa dimediasi untuk melaksanakan tugas kognitif melalui penggunaan peralatan psikologis untuk membangun proses kognitif tingkat lebih tinggi.

Fase II : Konten sebagai Proses (*Content as Process Development*)

Langkah-langkahnya:

1. Siswa dimediasi untuk membangun konsep-konsep penting dasar yang diperlukan secara sistematis dari pengalaman dan bahasa sehari-hari.
2. Siswa dimediasi untuk menemukan dan merumuskan pola dan hubungan dalam latihan kognitif.

Fase III : Praktek Konstruksi Kognitif Konseptual (*Cognitive Conceptual Construction Practice*)

Pada fase ini siswa dimediasi untuk mempraktekkan peralatan psikologis matematis tertentu untuk mengorganisir dan mengatur penggunaan fungsi kognitif untuk membangun pemahaman konseptual.

Rigorous Mathematical Thinking pada diri siswa ditandai oleh dua komponen menurut Kinard dan Konzulin (Munirah, 2014, hlm. 21), yaitu:

- a. Disposisi pemikir *rigorous*, yaitu secara terus menerus menghadapi tantangan dan kerumitan, memiliki motivasi dan kedisiplinan untuk tetap teguh melewati perjuangan yang berorientasi tujuan;
- b. Kualitas pemikir *rigorous*, yaitu dimulai dan dilatih melalui proses mental yang menimbulkan dan mengabdikan perlunya kapasitas dalam berpikir. Kualitas berpikir biasanya dinamis, meliputi: (1) ketajaman dalam fokus dan persepsi; (2) kejelasan dan kelengkapan definisi, konsep, dan penggambaran atribut kritis; (3) keseksamaan dan ketelitian; dan (4) kedalaman pemahaman dan pengertian.

Selanjutnya pendekatan *Rigorous Mathematical Thinking* memiliki kelebihan, dikemukakan oleh Tyanto dan Manoy (2013), diantaranya: (1) Guru memediasi siswa dalam memperoleh dan mengkonstruksi konsep matematika dengan menggunakan peralatan psikologis; (2) Siswa dapat memperoleh dan mengkonstruksi konsep matematika secara cermat sehingga konsep tersebut benar-benar tertanam dalam pikiran siswa. Dengan tertanamnya konsep diharapkan siswa akan mampu menjembatani kelemahan-kelemahan yang terjadi pada proses pembelajaran berlangsung untuk dirinya sendiri sehingga siswa mampu untuk menyelesaikan setiap masalah matematika yang dihadapinya dan siswa mampu untuk menyelesaikan berbagai soal-soal yang termasuk kedalam kategori non-rutin.

Berdasarkan uraian di atas dapat disimpulkan bahwa Pendekatan *Rigorous Mathematical Thinking* adalah suatu pendekatan yang menerapkan teori Vygotsky dan teori *Mediated Learning Experience* Feurstein yang terbagi dalam tiga fase pembelajaran, yaitu (1) Pengembangan Kognitif (*Cognitif Development*); (2) Konten sebagai Proses (*Content as Process Development*); dan (3) Praktek

Konstruksi Kognitif Konseptual (*Cognitive Conceptual Contruction Practice*).

5. Pendekatan Saintifik

Pendekatan Saintifik merupakan pendekatan ilmiah yang terdapat dalam kurikulum 2013. Berdasarkan Kemendikbud (2013) pemilihan pendekatan scientific didasari dengan anggapan bahwa proses pembelajaran dapat dipadankan dengan suatu proses ilmiah.

Menurut Kemendikbud (2013), pembelajaran dengan pendekatan saintifik adalah pembelajaran yang mengadopsi langkah-langkah saintis dalam membangun pengetahuan melalui metode ilmiah, bercirikan penonjolan dimensi pengamatan, penalaran, penemuan, pengabsahan, dan penjelasan tentang suatu kebenaran.

Berdasarkan (Permendikbud No. 81A Tahun 2013) kegiatan pembelajaran dengan pendekatan saintifik untuk setiap pertemuannya merupakan rincian dari eksplorasi, elaborasi, konfirmasi, yaitu menjadi mengamati, menanya, mengumpulkan informasi, mengolah dan mengkomunikasinya. Kelima pokok pembelajaran tersebut dapat di rinci dalam berbagai kegiatan belajar sebagaimana tercantum dalam tabel 1.2 berikut:

Tabel 2.2

**Keterkaitan antara Langkah Pembelajaran dengan
Kegiatan Belajar dan Maknanya**

Langkah Pembelajaran	Kegiatan Belajar	Kompetensi Yang Dikembangkan
Mengamati	Membaca, mendengar, menyimak, melihat (tanpa atau dengan alat)	Melatih kesungguhan, ketelitian, mencari informasi
Menanya	Mengajukan pertanyaan tentang informasi tambahan tentang apa yang diamati (dimulai dari pertanyaan faktual sampai ke pertanyaan	Membentuk pikiran kritis yang perlu untuk hidup cerdas dan belajar sepanjang hayat

Langkah Pembelajaran	Kegiatan Belajar	Kompetensi Yang Dikembangkan
	yang bersifat hipotetik)	
Mengumpulkan informasi/ eksperimen	<ul style="list-style-type: none"> – Melakukan eksperimen – Membaca sumber lain selain buku teks – Mengamati objek/ kejadian/ aktivitas – Wawancara dengan narasumber 	Mengembangkan sikap teliti, jujur, sopan, menghargai pendapat orang lain, kemampuan berkomunikasi, menerapkan kemampuan mengumpulkan informasi melalui berbagai cara yang dipelajari, mengembangkan kebiasaan belajar dan belajar sepanjang hayat.
Mengasosiasikan/ mengolah informasi	<p>Mengolah informasi yang sudah dikumpulkan baik terbatas dari hasil kegiatan mengumpulkan/eksperimen maupun hasil dari kegiatan mengamati dan kegiatan mengumpulkan informasi.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Pengolahan informasi yang dikumpulkan dari yang bersifat menambah keluasan dan kedalaman sampai kepada pengolahan informasi yang bersifat mencari solusi dari berbagai sumber yang memiliki pendapat yang berbeda sampai kepada yang bertentangan 	Mengembangkan sikap jujur, teliti disiplin, taat aturan, kerja keras, kemampuan menerapkan prosedur dan kemampuan berpikir induktif serta deduktif menyimpulkan
Mengomunikasikan	Menyampaikan hasil pengamatan, kesimpulan berdasarkan hasil analisis	Mengembangkan sikap jujur, teliti, toleransi, kemampuan berpikir

Langkah Pembelajaran	Kegiatan Belajar	Kompetensi Yang Dikembangkan
	secara lisan, tertulis, atau media lainnya.	sistematis, mengungkapkan pendapat dengan singkat dan jelas dan mengembangkan kemampuan berbahasa yang baik dan benar.

6. Kemampuan Pemecahan Masalah Matematik

Salah satu bagian dari tujuan pembelajaran matematika yang sangat penting dalam proses pembelajaran adalah pemecahan masalah. Dengan pemecahan masalah siswa dimungkinkan untuk mendapatkan pengalaman dengan menggunakan pengetahuan serta keterampilan yang telah dimilikinya. Hal tersebut dapat diterapkan pada proses pencarian penyelesaian masalah yang bersifat tidak rutin. Melalui kegiatan ini aspek-aspek kemampuan matematika seperti aturan pada masalah tidak rutin, penemuan pola, penggeneralisasian dan komunikasi matematika dapat dikembangkan secara lebih baik. Siswa akan merancang suatu penyelesaian dari masalah yang dihadapinya.

Pemecahan masalah merupakan suatu proses dalam menyelesaikan suatu masalah. Masalah yang timbul dapat beragam misalnya masalah yang dialami pada saat pembelajaran matematika. Pemecahan masalah berdasar dari masalah atau persoalan yang belum ditemukan jawaban. Gagne (Ruseffendi, 2006, hlm. 335) mengatakan, “Pemecahan masalah adalah tipe belajar yang tingkatnya paling tinggi dan kompleks dibandingkan dengan tipe belajar lainnya”. Suatu persoalan dikatakan masalah, jika persoalan tersebut tidak bisa diselesaikan dengan cara biasa, hal ini sebagaimana diungkapkan oleh Ruseffendi (2006, hlm. 335), “Masalah dalam matematika adalah sesuatu persoalan yang ia sendiri mampu menyelesaikannya tanpa algoritma rutin”.

Ruseffendi (2006, hlm. 336) menarik kesimpulan dari penelitiannya sebagai berikut:

Sesuatu persoalan itu merupakan masalah bagi seseorang, pertama bila persoalan itu tidak dikenalnya. Maksudnya ialah siswa belum memiliki prosedur atau algoritma tertentu untuk menyelesaikannya. Kedua ialah

siswa harus mampu menyelesaikannya, baik kesiapan mentalnya maupun pengetahuan siapnya; terlepas dari apakah ia sampai atau tidak kepada jawabannya. Ketiga, sesuatu itu merupakan pemecahan masalah baginya bila ia ada niat menyelesaikannya.

Hasil dari suatu pemecahan masalah adalah jawaban yang dicari. Terkadang untuk jenis soal non-rutin siswa mengalami kesulitan dalam mencari jawaban yang benar. Namun, apabila siswa sudah memiliki kemampuan dalam pemecahan masalah matematik, siswa akan menemukan secara langsung dan mandiri jawaban atas soal yang dianggapnya sulit. Bagi beberapa siswa yang belum memiliki kemampuan pemecahan masalah yang baik karena kurangnya belajar akan langsung menganggap soal non-rutin sebagai soal yang sulit. Akhirnya siswa tersebut akan menafsirkan bahwa pembelajaran matematika itu sulit.

Dalam pemecahan masalah hal yang difokuskan siswa yaitu pada metode-metode penyelesaiannya, maka yang menjadi hasilnya adalah pemahaman baru tentang matematika yang ada didalam masalah tersebut. Siswa dimungkinkan untuk dapat merancang suatu penyelesaiannya dengan pemahamannya namun tidak keluar dari ketentuan-ketentuan atau aturan-aturan yang sudah ada. Seperti halnya menganalisis dan membangun suatu penyelesaian dari permasalahan yang dibentuk pada suatu konstruksi pola pikir baru dengan jawaban akhir yang sama dengan cara menggunakan aturan-aturan yang telah ditetapkan. Kemudian membentuk suatu proses untuk mencapai seperangkat aturan yang lebih tinggi. Hal ini sesuai dengan pendapat (Cintyani dan Eliyarti, 2012, hlm. 127), pemecahan masalah tidak sekedar sebagai bentuk kemampuan menerapkan aturan-aturan yang telah dikuasai melalui kegiatan-kegiatan belajar terdahulu, melainkan lebih dari itu, merupakan proses untuk mendapatkan seperangkat aturan pada tingkat yang lebih tinggi.

Mampu memecahkan suatu permasalahan dapat membantu mengatasi kesulitan-kesulitan dalam belajar. Betapa pentingnya pemecahan masalah dalam pembelajaran matematika disebutkan oleh Jusniani(2012, hlm. 115), “Pemecahan masalah sangat penting dalam pembelajaran matematika karena proses pemecahan masalah akan menjadikan pemahaman siswa lebih baik”.

Menurut Polya (Suherman, 2003, hlm. 91), penguraian proses yang dapat dilakukan pada setiap langkah pemecahan masalah. Langkah-langkah kegiatan

pemecahan masalah yang digunakan adalah:

a. Memahami masalah

Langkah ini sangat penting dilakukan sebagai tahap awal dari pemecahan masalah agar siswa dapat dengan mudah mencari penyelesaian masalah yang diajukan. Siswa diharapkan dapat memahami kondisi soal atau masalah yang meliputi: mengenali soal, menganalisis soal, dan menterjemahkan informasi yang diketahui dan ditanyakan pada soal tersebut.

b. Merencanakan penyelesaian

Masalah perencanaan ini penting untuk dilakukan karena pada saat siswa mampu membuat suatu hubungan dari data yang diketahui dan tidak diketahui, siswa dapat menyelesaikannya dari pengetahuan yang diperoleh sebelumnya.

c. Menyelesaikan masalah sesuai rencana

Langkah perhitungan ini penting dilakukan karena pada langkah ini pemahaman siswa terhadap permasalahan dapat terlihat. Pada tahap ini siswa sudah siap melakukan perhitungan dengan segala macam yang diperlukan termasuk konsep dan rumus yang sesuai.

d. Melakukan pengecekan kembali terhadap semua langkah yang telah dikerjakan

Pada tahap ini siswa diharapkan berusaha untuk mengecek kembali dengan teliti setiap tahap yang telah ia lakukan. Dengan demikian, kesalahan dan kekeliruan dalam penyelesaian soal dapat ditemukan.

Beberapa indikator kemampuan pemecahan masalah matematik menurut Sumarmo (2013, hlm. 348), adalah sebagai berikut:

- a. Mengidentifikasi unsur-unsur yang diketahui, yang ditanyakan, dan kecukupan unsur yang diperlukan.
- b. Merumuskan masalah matematik atau menyusun model matematik.
- c. Menerapkan strategi untuk menyelesaikan berbagai masalah (sejenis dan masalah baru) dalam atau di luar matematika.
- d. Menjelaskan atau menginterpretasi hasil sesuai permasalahan asal.
- e. Menggunakan matematika secara bermakna.

Indikator-indikator tersebut akan digunakan sebagai indikator-indikator kemampuan pemecahan masalah matematik dalam penelitian ini. Selain daripada itu indikator-indikator tersebut sejalan dengan aspek pengukuran kemampuan pemecahan masalah menurut Mahmudi (2010). Aspek tersebut adalah sebagai berikut:

- a. Pemahaman, yaitu mengidentifikasi data atau informasi yang diperlukan untuk menyelesaikan masalah dan membuat model matematis dari masalah.
- b. Strategi dan prosedur, yaitu memilih dan menggunakan strategi

- pemecahan masalah dan melakukan prosedur matematis.
- c. Komunikasi, yaitu memberikan penjelasan terhadap strategi, konsep-konsep terkait dan menjadi bekal siswa untuk menjalani kehidupan.

Berdasarkan pendapat-pendapat tersebut, kemampuan pemecahan masalah matematik siswa adalah kemampuan siswa dalam menyelesaikan masalah yang tidak rutin dan kemampuan menggali informasi dari suatu masalah, kemudian mengolah informasi sehingga dapat menyelesaikan masalah, dan terakhir dapat melakukan koreksi dari penyelesaian masalah yang dilakukan.

7. Kemandirian Belajar Siswa

Kemandirian belajar atau dikenal dengan istilah lain, yaitu *self regulated learning*. Kedua istilah tersebut tidak memiliki pengertian yang persis sama namun memiliki beberapa kesamaan karakteristik. Kemandirian belajar siswa merupakan kondisi dimana siswa belajar dengan kesadaran diri sendiri untuk mencapai tujuannya. Secara mandiri artinya siswa akan mampu menyelesaikan masalah-masalah yang dihadapinya oleh kemampuannya sendiri. Dengan kemampuannya sendiri siswa mampu untuk memecahkan masalah atau mencari penyelesaian masalah.

Belajar merupakan suatu kegiatan dalam rangka meningkatkan kemampuan dan pengetahuan. Sehingga kemandirian belajar merupakan suatu kondisi dimana siswa memungkinkan dirinya untuk selalu memposisikan diri dalam kondisi apapun guna meningkatkan kemampuan dan pengetahuannya baik itu dalam proses pembelajaran seperti memecahkan suatu masalah belajar ataupun dalam kegiatan kehidupan sehari-hari. Kadarisma (2016, hlm. 61) mengatakan bahwa “Kemandirian belajar merupakan sebuah proses yaitu siswa mengatur tercapainya hasil dan aksi mereka sendiri”.

Dengan kemandiran belajar menurut Sumarmo (2010, hlm.8), siswa cenderung belajar lebih baik, mampu memantau, mengevaluasi, dan mengatur belajarnya secara efektif, menghemat waktu secara efisien, mampu mengarahkan dan mengendalikan diri sendiri dalam berpikir dan bertindak, serta tidak merasa tergantung kepada orang lain secara emosional. Sejalan dengan pendapat yang diungkapkan oleh Budiyanto dan Rohaeti (2014, hlm. 167), dalam pembelajaran matematika agar kemampuan matematik dan aspek afektif dari hasil belajar

matematika tumbuh dengan baik, siswa perlu memiliki perilaku khusus dalam belajar yang dinamakan dengan kemandirian belajar.

Selain dari pada itu, kemandirian belajar memungkinkan siswa untuk mampu memilih cara atau penyelesaian suatu masalah-masalah belajar dengan berbagai pengetahuan yang dimilikinya sehingga akan tercapai tujuan dari pembelajaran itu. Pemilihan yang tepat dimaksudkan untuk menghindari berbagai kekeliruan atau ketidaktepatan dalam pemecahan suatu masalah.

Kemandirian belajar siswa merupakan salah satu bagian yang penting dalam psikologi pendidikan. Hal ini didukung oleh pernyataan Slavin (2009, hlm. 6), yaitu:

“Salah satu prinsip penting dalam psikologi pendidikan ialah bahwa guru tidak hanya dapat memberikan pengetahuan kepada siswa. Siswa harus membangun pengetahuan dalam pikiran mereka sendiri. Guru dapat memfasilitasi proses ini dengan mengajar dengan cara-cara yang menjadikan informasi bermakna dan relevan bagi siswa, dengan memberi kesempatan kepada siswa menemukan atau menerapkan sendiri gagasan-gagasan, dan dengan mengajari siswa untuk mengetahui dan dengan sadar menggunakan strategi mereka sendiri untuk belajar.”

Pendeskripsian kemandirian belajar (Susilawati, 2009, hlm. 7), mendeskripsikan kemandirian belajar sebagai berikut:

1. Siswa berusaha untuk meningkatkan tanggung jawab dalam mengambil berbagai keputusan.
2. Kemandirian dipandang sebagai suatu sifat yang sudah ada pada setiap orang dan situasi pembelajaran.
3. Kemandirian bukan berarti memisahkan diri dari orang lain.
4. Pembelajaran mandiri dapat mentransfer hasil belajarnya yang berupa pengetahuan dan keterampilan dalam berbagai situasi.
5. Siswa yang belajar mandiri dapat melibatkan berbagai sumber daya dan aktivitas seperti membaca sendiri, belajar kelompok, latihan dan kegiatan korespondensi.
6. Peran efektif guru dalam belajar mandiri masih dimungkinkan seperti berdialog dengan siswa, mencari sumber, mengevaluasi hasil dan mengembangkan berfikir kritis.
7. Beberapa institusi pendidikan menemukan cara untuk mengembangkan belajar mandiri melalui program pembelajaran terbuka.

Siswa yang mandiri akan memosisikan dirinya untuk mampu mengatasi segala permasalahan belajar tanpa bantuan orang lain. Masalah-masalah yang timbul seperti kesulitan dalam menyelesaikan soal rutin dan non-rutin dapat dicari

dengan mandiri. Kemandirian akan menunjukkan tanggung jawab untuk dirinya. Betapa pentingnya belajar siswa akan sadar dengan kemandirian tersebut.

Aspek-aspek dalam kemandirian belajar menurut Song dan Hill (Melissa, M. M, 2016, hlm. 6) adalah sebagai berikut.

Personal Attributes merupakan aspek yang berkaitan dengan motivasi siswa, tanggung jawab siswa dalam hal belajar, penggunaan sumber belajar, dan strategi belajar; Processes merupakan aspek yang berkaitan dengan otonomi proses pembelajaran yang dilakukan oleh siswa meliputi merancang belajar, memantau/memonitoring belajar, serta evaluasi pembelajaran; Learning Context merupakan faktor lingkungan dan bagaimana faktor tersebut mempengaruhi tingkat kemandirian siswa. Ada beberapa faktor dalam konteks pembelajaran yang dapat mempengaruhi pengalaman belajar mandiri siswa, antara lain struktur dan sifat tugas dalam konteks pembelajaran.

Berikut ini merupakan tiga fase utama dalam siklus kemandirian belajar menurut Schunk dan Zimmerman (Sumarmo, 2004), yaitu: merancang belajar, memantau kemajuan belajar selama menerapkan pembelajaran, dan mengevaluasi hasil belajar secara lengkap.

Selanjutnya berikut ini tahapan dari ketiga fase menurut Schunk dan Zimmerman (Sumarmo, 2004), yaitu:

- a. Pada fase merancang belajar berlangsung kegiatan: menganalisis tugas belajar, menetapkan tujuan belajar, dan merancang strategi belajar.
- b. Pada fase memantau berlangsung kegiatan mengajukan pertanyaan pada diri sendiri: Apakah strategi yang dilaksanakan sesuai dengan rencana? Apakah saya kembali kepada kebiasaan lama? Apakah saya tetap memusatkan diri? Dan apakah strategi telah berjalan dengan baik?
- c. Pada fase mengevaluasi, memuat kegiatan memeriksa bagaimana jalannya strategi: Apakah strategi telah dilaksanakan dengan baik? (evaluasi proses); Hasil belajar apa yang telah dicapai? (evaluasi produk); dan Sesuaikah strategi dengan jenis tugas belajar yang dihadapi?
- d. Pada fase merefleksi: Pada dasarnya phase ini tidak hanya berlangsung pada fase keempat dalam siklus self regulated learning, namun refleksi berlangsung pada tiap phase selama siklus berjalan.

Indikator kemandirian yang berdasar pada pendapat sejumlah penulis Sumarmo (2010), merangkum indikator kemandirian belajar meliputi:

- a. Inisiatif dan motivasi belajar intrinsik
- b. Kebiasaan mendiagnosa kebutuhan belajar
- c. Menetapkan tujuan/target belajar
- d. Memonitor, mengatur, dan mengontrol belajar
- e. Memandang kesulitan sebagai tantangan

- f. Memanfaatkan dan mencari sumber yang relevan
- g. Memilih, menerapkan strategi belajar
- h. Mengevaluasi proses dan hasil belajar
- i. Konsep diri/kemampuan diri

Studi yang dilakukan Sumarmo (2004), melaporkan bahwa siswa yang memiliki kemandirian belajar yang tinggi :

- a. Cenderung belajar lebih baik dalam pengawasannya sendiri daripada dalam pengawasan program
- b. Mampu memantau, mengevaluasi, dan mengatur belajar secara efektif
- c. Menghemat waktu dalam menyelesaikan tugasnya
- d. Mengatur belajar dan waktu secara efisien

Berdasarkan uraian diatas dapat disimpulkan bahwa kemandirian belajar siswa adalah merupakan salah satu bagian dari afektif siswa yang memungkinkan siswa untuk bertanggung jawab dengan keperluannya dan juga mengarahkan siswa untuk mampu memilih sendiri pengetahuan mana yang akan digunakannya dalam pemecahan suatu masalah.

B. Analisis dan Pengembangan Materi Pelajaran yang Diteliti

1. Keluasan dan Kedalaman Materi

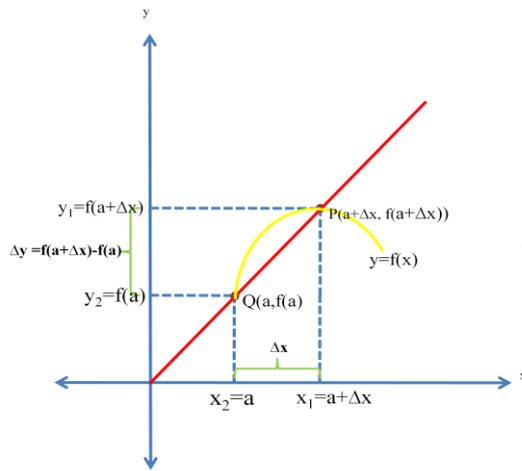
Materi Turunan merupakan salah satu materi yang terdapat pada kelas XI Semester 2 Bab ke 5. Pembahasannya meliputi konsep turunan, aturan turunan fungsi aljabar, sifat turunan fungsi aljabar dan analisis grafik fungsi untuk fungsi naik dan fungsi turun. Adapun materi prasyarat dari Turunan adalah Fungsi Aljabar dan Limit.

Terkait dengan penelitian ini, peneliti menggunakan materi Turunan sebagai materi yang ada dalam instrumen tes. Dimana materi Turunan diaplikasikan ke dalam salah satu kemampuan matematik yang akan diteliti yaitu kemampuan pemecahan masalah matematik berupa penghubungan antara Turunan dengan materi dalam kehidupan nyata atau sehari-hari menggunakan materi matematika.

Berikut ini merupakan hubungan antara materi Turunan dengan kemampuan pemecahan masalah matematik serta menggunakan model *Problem-Based Learning* dengan Pendekatan *Rigorous Mathematical Thinking* diuraikan dalam materi ajar.

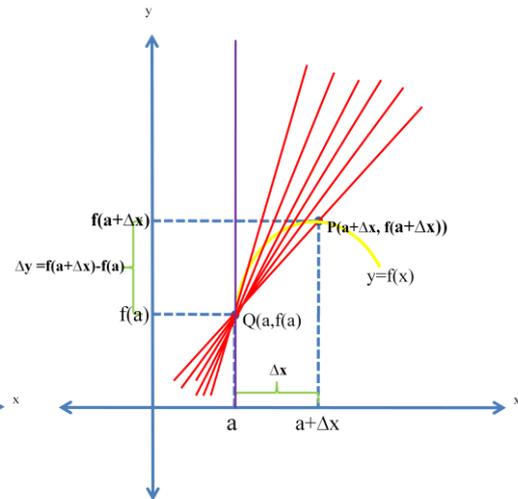
Mula-mula siswa diberikan suatu materi ajar yang akan memberikannya stimulus berupa materi-materi sebagai berikut:

a. Konsep Turunan



Gambar 2.2

Konsep Turunan 1



Gambar 2.3

Konsep Turunan 2

Pada Gambar 1.2. Misalkan Q adalah suatu titik tetap pada grafik $y=f(x)$ dan P adalah sebuah titik berdekatan yang dapat dipindah-pindahkan sepanjang $y=f(x)$. Misalkan titik Q berkoordinat, $(a, f(a))$ maka titik P berkoordinat $(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$. Garis yang melalui Q dan P mempunyai gradien (kemiringan) $\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$. Garis ini memotong grafik di dua titik Q dan P yang berbeda.

Jika titik P bergerak sepanjang kurva $y=f(x)$ mendekati titik Q maka nilai Δx semakin kecil. Jika nilai Δx mendekati nol maka titik P akan berimpit dengan titik Q. Akibatnya, garis singgung (jika tidak tegak lurus pada sumbu-x) adalah garis yang melalui $Q(a, f(a))$ dengan gradien $m_{QP} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$.

b. Aturan dan Sifat Turunan Fungsi Aljabar

1) Turunan Fungsi di $x=a$

Jika fungsi $y=f(x)$ terdefinisi di sekitar $x=a$ maka :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Jika $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ada maka nilainya disebut turunan fungsi $f(x)$ di $x=a$. Turunan

fungsi f adalah suatu fungsi juga, yaitu fungsi turunan yang dilambangkan dengan $f'(x)$. Untuk menyatakan turunan di $x=a$ dinyatakan dengan $f'(a)$. Jadi,

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \text{ atau } f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

2) Notasi Leibnitz

Karena turunan fungsi $f(x)$ dinotasikan dengan $f'(x)$. Nilai Δx menyatakan perubahan nilai x , yaitu $\Delta x = x_1 - x_2$. Adapun perubahan $f(x+\Delta x)-f(x)$ menyatakan perubahan nilai fungsi $f(x)$ dinotasikan dengan Δf . Selanjutnya, bentuk limit tersebut dapat dituliskan menjadi $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Kemudian terdapat notasi lain untuk menyatakan turunan fungsi, yaitu $\frac{df}{dx}$. Diketahui fungsi

$$y = f(x)$$

Sehingga turunan fungsi dapat dituliskan menjadi

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x)$$

Notasi tersebut diperkenalkan oleh seorang ahli matematika Jerman, yaitu Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) sehingga dinamakan *notasi Leibnitz*, tepatnya notasi *Double d Leibnitz*.

3) Turunan Fungsi $f(x)=ax^n$

Misalkan, fungsi $f(x)= ax^n$ dengan $n=1, 2$, dan 3 . Untuk $n=1$, diperoleh $f(x)=ax$ dan turunan fungsi tersebut adalah

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x + \Delta x) - ax}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{ax + a\Delta x - ax}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a \end{aligned}$$

Untuk $n=2$, diperoleh $f(x)=ax^2$ dan turunan fungsi tersebut adalah

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x+\Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + 2ax\Delta x + a\Delta x^2 - ax^2}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2ax + a\Delta x$$

$$= 2ax$$

Maka dapat diambil kesimpulan

Misalkan, $f(x) = ax^n$, dengan n bilangan asli maka $f'(x) = nax^{n-1}$

Untuk $n=0$, $f(x)=ax^n$ menjadi $f(x)=ax^0=a$. Fungsi $f(x)=a$ dinamakan fungsi konstan sehingga untuk berapapun nilai x , nilai fungsinya tetap, yaitu a . Turunan fungsi konstan adalah

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a-a}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Sehingga rumus tersebut berlaku untuk n bilangan bulat sebagai berikut:

Misalkan, $f(x) = ax^n$ dengan n bilangan bulat maka $f'(x) = anx^{n-1}$ untuk, $f'(x) = 0$ dengan a sebarang bilangan real.

4) Turunan fungsi $f(x)=ax^n$ dengan n bilangan rasional

Misalkan, $f(x) = ax^n$,

dengan n bilangan rasional maka turunannya adalah

$$f'(x) = nax^{n-1}$$

5) Turunan fungsi berbentuk $y=u \pm v$

Fungsi $y=f(x)$ dengan $f(x)=u(x)+v(x)$, dalam hal ini $u(x)$ dan $v(x)$ fungsi yang dapat diturunkan di $x=a$ untuk a bilangan real. Dengan demikian,

$$f'(a) = f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[u(a+\Delta x) - v(a+\Delta x)] - [u(a) + v(a)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(a+\Delta x) - u(a) + v(a+\Delta x) - v(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(a+\Delta x) - u(a)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(a+\Delta x) - v(a)}{\Delta x}$$

$$= u'(a) + v'(a)$$

Kesimpulan:

Misalkan, a adalah bilangan real sebarang sehingga berlaku $y' = f'(a) = u'(a) + v'(a)$; untuk $y = u + v$ maka $y' = u' + v'$

Dengan cara yang sama,

$y' = f'(a) = u'(a) - v'(a)$; untuk $y = u - v$ maka $y' = u' - v'$

6) Turunan fungsi $y=c.u$

Diketahui, fungsi $y=f(x)$ dengan $f(x)=c.u(x)$, dalam hal ini c konstanta dan $u(x)$ fungsi yang dapat diturunkan di $x=a$ untuk a bilangan real sehingga

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c.u(a+\Delta x) - c.u(a)}{\Delta x} \\ &= c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(a+\Delta x) - u(a)}{\Delta x} \\ &= cu'(a) \end{aligned}$$

Misalkan, a adalah sebarang bilangan real sehingga untuk $y=f(a)=c.u(a)$ berlaku $f'(a)=c.u'(a)$. Akibatnya, dari $y=cu$ berlaku $y'=c.u'$.

7) Turunan fungsi $y=uv$

Diketahui, fungsi $y=f(x)$ dengan $f(x)=u(x).v(x)$, dengan $u(x)$ dan $v(x)$ adalah fungsi yang dapat diturunkan di $x=a$, untuk a bilangan real. Oleh karena itu

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(a+\Delta x).v(a+\Delta x) - u(a).v(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(a+\Delta x).v(a+\Delta x) - u(a+\Delta x).v(a)}{(a+\Delta x)} + \frac{u(a+\Delta x).v(a) - u(a).v(a)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(a+\Delta x)\{v(a+\Delta x) - v(a)\}}{(a+\Delta x)} + \frac{v(a)\{u(a+\Delta x) - u(a)\}}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(a+\Delta x) \frac{v(a+\Delta x) - v(a)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(a) \frac{u(a+\Delta x) - u(a)}{\Delta x} \\ &= u(a).v'(a) + v(a).u'(a) \end{aligned}$$

Oleh karena itu, jika $y=f(x)=u(x).v(x)$ dengan a bilangan real sebarang berlaku $f'(a) = u(a).v'(a) + v(a).u'(a)$.

Untuk $y=u.v$, maka $y'=uv'+vu'$.

8) Turunan fungsi $y=u^n$

Diketahui $y=f(u)$ dengan $f(u)=u^n$ dan $u=g(x)$. Jika fungsi $u=g(x)$ dapat diturunkan di $x=a$, untuk a bilangan real maka

$$g'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(a+\Delta x) - g(a)}{\Delta x}$$

Oleh karena a bilangan real sebarang maka.

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Dengan cara yang sama diperoleh:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

Untuk Δx mendekati nol maka Δu mendekati nol sehingga $f'(u) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$ dan

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u)g'(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u)g'(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)g'(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)u'(x)$$

$f(u)=u^n$, $f'(u)=nu^{n-1}$ sehingga $y'(x)=nu^{n-1}u'(x)$.

Untuk $y=u^n$ maka $y'=nu^{n-1}u'(x)$

9) Aturan Rantai

Misalkan, $y=f(u)$ dan $u=g(x)$,

$$(f \circ g)(x) = f\{g(x)\} = f(u) = y$$

Jika fungsi g mempunyai turunan di x dan fungsi f mempunyai turunan di u , turunan fungsi komposisi $y=f\{g(x)\}=f \circ g(x)$ ditentukan sebagai berikut:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\text{Atau } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

10) Turunan Fungsi $y = \frac{u}{v}$

Diketahui, fungsi $y=f(x)$ dengan $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, dalam hal ini $u(x)$ dan $v(x)$ fungsi yang dapat diturunkan di $x=a$ untuk a bilangan real maka:

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(a+\Delta x)}{v(a+\Delta x)} - \frac{u(a)}{v(a)}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(a)u(a+\Delta x) - u(a)v(a+\Delta x)}{\Delta x v(a)v(a+\Delta x)} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(a)u(a+\Delta x) - v(a)u(a) + u(a)v(a) - u(a)v(a+\Delta x)}{\Delta x v(a)v(a+\Delta x)} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(a)\left(\frac{u(a+\Delta x) - u(a)}{\Delta x}\right) - u(a)\left(\frac{v(a+\Delta x) - v(a)}{\Delta x}\right)}{v(a)v(a+\Delta x)} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(a) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{u(a+\Delta x) - u(a)}{\Delta x} - u(a) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(a+\Delta x) - v(a)}{\Delta x}}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(a)v(a+\Delta x)} \\
 &= \frac{u'(a) \cdot v(a) - u(a) \cdot v'(a)}{v(a) \cdot v(a)} \\
 &= \frac{u'(a) \cdot v(a) - u(a) \cdot v'(a)}{(v(a))^2}
 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, jika $y=f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ dengan a sebarang bilangan real sehingga berlaku $f'(a) = \frac{u'(a) \cdot v(a) - u(a) \cdot v'(a)}{(v(a))^2}$ maka $f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$.

Untuk $y = \frac{u}{v}$, berlaku $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

c. Analisis Grafik Fungsi untuk Fungsi Naik dan Fungsi Turun

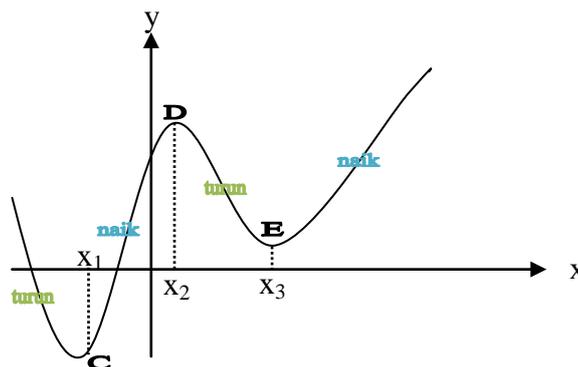
Misalkan fungsi $f(x)$ terdefinisi dalam interval I.

- 1) Fungsi $f(x)$ dikatakan fungsi naik dalam interval I, jika untuk setiap bilangan x_1 dan x_2 dalam I dan $x_1 < x_2$ maka berlaku hubungan $f(x_1) < f(x_2)$.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- 2) Fungsi $f(x)$ dikatakan fungsi turun dalam interval I, jika untuk setiap bilangan x_1 dan x_2 dalam I dan $x_1 > x_2$ maka berlaku hubungan $f(x_1) > f(x_2)$.

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$



Gambar 2.4
Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Teorema:

Misalkan fungsi f dirumuskan oleh $y=f(x)$ dalam interval I dan $f(x)$ diferensial pada setiap x dalam interval itu.

- 1) Jika $f'(x) > 0$ untuk $x \in I$ maka fungsi $f(x)$ naik pada I .
- 2) Jika $f'(x) < 0$ untuk $x \in I$ maka fungsi $f(x)$ turun pada I .
- 3) Jika $f'(x) = 0$ untuk $x \in I$ maka fungsi $f(x)$ stasioner pada I .

Teorema : Nilai Stasioner

Jika fungsi $y=f(x)$ diferensiabel di $x=a$ dengan $f'(a)=0$ maka $f(a)$ adalah nilai stasioner dari fungsi $f(x)$ di $x=a$.

2. Karakteristik Materi

Penjabaran materi merupakan perluasan dari KI (Kompetensi Inti) dan KD (Kompetensi Dasar) yang telah ditetapkan dalam kurikulum 2013, berikut ini adalah KI yang terdapat dalam Kurikulum 2013 untuk SMA kelas XI.

KI.3 :: Memahami, menerapkan, dan menganalisis pengetahuan faktual, konseptual, prosedural, dan metakognitif berdasarkan rasa ingin tahunya tentang ilmu pengetahuan, teknologi, seni, budaya, dan humaniora dengan wawasan kemanusiaan, kebangsaan, kenegaraan, dan peradaban terkait penyebab fenomena dan kejadian, serta menerapkan pengetahuan prosedural pada bidang kajian yang spesifik sesuai dengan bakat dan minatnya untuk memecahkan masalah.

Berikut adalah KD yang terdapat pada kurikulum 2013 untuk SMA kelas XI Semester 2 dengan materi ajar Turunan.

- 3.21 : Mendeskripsikan konsep turunan dengan menggunakan konteks matematik atau konteks lain dan menerapkannya.
- 3.22 : Menurunkan aturan dan sifat turunan fungsialjabar dari aturan dan sifat limitfungsi.
- 3.23 : Memilih dan menerapkan strategi menyelesaikan masalah dunia nyata dan matematikayangmelibatkan turunan dan memeriksa kebenaran langkah-langkahnya.
- 3.24 : Mendeskripsikan konsep turunan dan menggunakannya untuk menganalisis grafik fungsi dan menguji sifat-sifat yang dimiliki untuk mengetahui fungsi naik dan fungsi turun.

Penelitian ini menggunakan bahan ajar (LKS) secara berkelompok. Sebelum siswa dibentuk kelompok guru memberikan penjelasan mengenai tujuan dan manfaat dari pembelajaran yang akan dilaksanakan serta menjelaskan garis besar dari materi turunan yang akan diajarkan. Selanjutnya pembelajaran berlangsung secara berkelompok dengan setiap kelompok memperoleh LKS masing-masing untuk dicari pemecahan masalahnya bersama teman-teman satu kelompok.

3. Alat, Media dan Sumber

- a. Alat : Spidol, papan tulis, penghapus
- b. Media : Laptop, infokus
- c. Sumber : Buku

4. Strategi Pembelajaran

- Pendekatan : *Rigorous Mathematical Thinking*
- Model Pembelajaran : *Problem-Based Learning (PBL)*
- Metode Pembelajaran : Ceramah, Diskusi, Tanya Jawab dan Kerja Kelompok

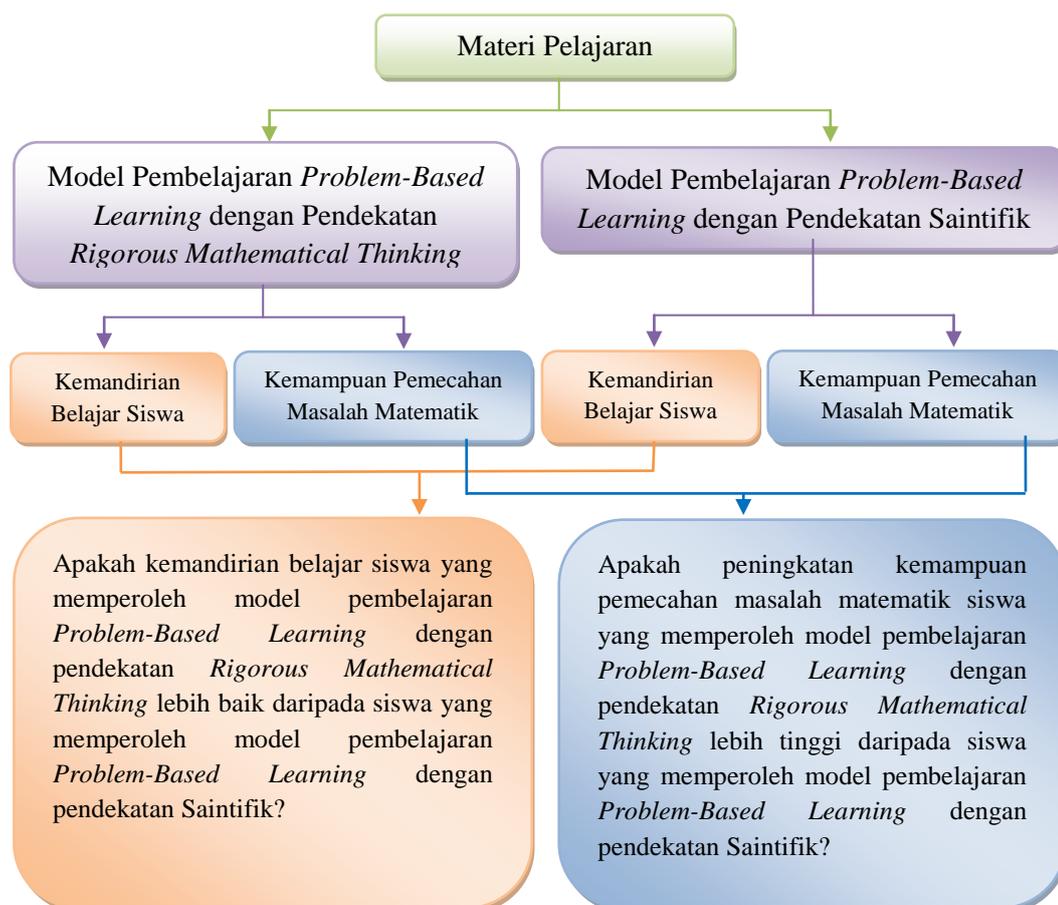
C. Kerangka Pemikiran, Asumsi dan Hipotesis Penelitian

1. Kerangka Pemikiran

Kesulitan dalam menyelesaikan soal-soal yang tidak rutin (non-rutin) atau soal-soal yang tidak biasa dikerjakan oleh siswa pada pelajaran matematika

menjadi indikasi masih rendahnya kemampuan pemecahan masalah matematik siswa dalam pembelajaran matematika. Keberagaman terjadi di kelas dengan siswa-siswa yang memiliki karakteristik yang berbeda-beda hal tersebut menandakan suatu indikasi diperlukan upaya atau cara yang bijaksana guna menjembatani atau memediasi keberagaman karakteristik siswa sehingga tidak akan menjadi suatu hambatan baik pada proses pembelajaran dan hasil belajar.

Berdasarkan penjelasan di atas, dapat diduga dengan menggunakan model pembelajaran *Problem-Based Learning* dengan *Pendekatan Rigorous Mathematical Thinking* dapat meningkatkan kemampuan pemecahan masalah matematik dan kemandirian belajar siswa melalui materi ajar atau materi pembelajaran yang diberikan. Untuk menggambarkannya, maka dibuatlah suatu kerangka pemikiran yang di sajikan dalam bentuk diagram sebagai berikut:



Gambar 2.5
Kerangka Pemikiran

2. Asumsi

Ruseffendi (2010, hlm. 25) mengatakan bahwa asumsi merupakan suatu anggapan dasar mengenai peristiwa yang semestinya terjadi atau hakekat sesuatu yang sesuai dengan hipotesis yang dirumuskan. Dengan kata lain asumsi adalah dasar dalam membuat suatu anggapan atas peristiwa yang harus terjadi dengan hipotesis yang telah dirumuskan. Dengan demikian, anggapan dasar dalam penelitian ini adalah:

- a. Model Pembelajaran dengan Pendekatan yang tepat akan mempengaruhi kemampuan pemecahan masalah matematik siswa.
- b. Nilai rapor siswa merupakan prestasi belajar siswa SMA dalam pendidikan formal, mencakup aspek kognitif, afektif dan psikomotor yang diberikan oleh guru pada akhir semester atau periode tertentu.
- c. Kemandirian belajar merupakan salah satu aspek afektif yang akan meningkatkan tanggung jawab siswa terhadap belajar.

3. Hipotesis

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan di atas, maka penelitian ini mengambil hipotesis sebagai berikut:

- a. Peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematik siswa yang memperoleh model pembelajaran *Problem-Based Learning* dengan pendekatan *Rigorous Mathematical Thinking* lebih tinggi daripada siswa yang memperoleh model pembelajaran *Problem-Based Learning* dengan pendekatan Saintifik.
- b. Peningkatan kemandirian belajar siswa yang memperoleh model pembelajaran *Problem-Based Learning* dengan pendekatan *Rigorous Mathematical Thinking* lebih tinggi daripada siswa yang belum memperoleh model pembelajaran *Problem-Based Learning* dengan pendekatan *Rigorous Mathematical Thinking*.

D. Hasil Penelitian Terdahulu Yang Relevan

Beberapa penelitian yang relevan dengan penelitian ini yaitu penelitian yang dilakukan oleh:

1. Sujalmo dan Budiarto (2013) dengan judul penelitian “Profil Pemahaman Siswa terhadap Simbol, Huruf, dan Tanda pada Aljabar ditinjau dari

Kemampuan Matematika Siswa dan Fungsi Kognitif RMT”. Dari penelitian tersebut diperoleh hasil penelitian dengan kesimpulan bahwa siswa belum terbiasa menganalisis suatu permasalahan dengan lebih teliti. Sehingga seorang pendidik harus mulai membiasakan siswa untuk memikirkan kemungkinan-kemungkinan alternatif jawaban sebuah soal supaya siswa terbiasa untuk menganalisis suatu permasalahan dengan lebih teliti dan juga berpikir kreatif.

2. Munirah, S. (2014) dengan judul penelitian “Pendekatan *Rigorous Mathematical Thinking* (RMT) untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis dan Motivasi Belajar Siswa SMA”. Dengan hasil penelitian menunjukkan bahwa terjadi peningkatan kemampuan pemecahan masalah matematis yang yang pembelajarannya menggunakan pendekatan *Rigorous Mathematical Thinking* lebih tinggi daripada siswa yang menggunakan pendekatan saintifik.
3. Hendrayana, A. (2014) dengan judul penelitian “Pengaruh Pendekatan *Rigorous Mathematical Thinking* (RMT) terhadap kemampuan Pemahaman Konseptual, Kompetensi Strategis, dan Beban Kognitif Matematis Siswa SMP *Boarding School* (Sekolah Berasrama)”. Dengan hasil penelitian disimpulkan bahwa pendekatan pembelajaran RMT mempunyai pengaruh yang lebih baik dibanding pembelajaran langsung terhadap Pemahaman Konseptual, Kompetensi Strategis, dan Beban Kognitif Matematis Siswa.
4. Panji, F.M. (2015) dengan judul penelitian “Peningkatan Kemampuan Penalaran Dan Kemandirian Belajar Siswa SMP Melalui Model *Problem-Based Learning* (PBL)”. Hasil penelitiannya mengungkapkan bahwa kemampuan penalaran matematika dan kemandirian siswa yang mendapatkan model pembelajaran *Problem-Based Learning* lebih tinggi daripada siswa yang mendapatkan pembelajaran biasa, dan tidak terdapat korelasi antara kemampuan penalaran dengan kemandirian belajar siswa.