



INFOMATEK

Volume 1 Nomor 1 Juni 1999

JURNAL **INFORMATIKA, MANAJEMEN DAN TEKNOLOGI**

MODEL OPTIMASI PENJADWALAN JOBSHOP UNTUK
PRODUK-PRODUK BERSTRUKTUR MULTI-LEVEL

Tjutju T. Dimiyati

KINEMATICS MODEL OF ARTIFICIAL HUMAN LEG'S KNEE
MECHANISM

Farid Rizayana Mulia

PENGUNAAN KEMASAN DENGAN SISTEM ATMOSFER
TERMODIFIKASI (MAP) UNTUK MEMPERPANJANG MASA
SIMPAN BUAH-BUAHAN, SAYURAN DAN PRODUK SEGAR

Bonita Anjarsari

MEMBANGUN PABRIK MASA DEPAN

Arumsari

PENGUJIAN PERANGKAT LUNAK BERORIENTASI OBJEK
DENGAN TEKNIK "STATE-BASED TESTING"

Retno Hendrowati

FAKULTAS TEKNIK UNIVERSITAS PASUNDAN BANDUNG



INFOMATEK
Volume 1 Nomor 1 Juni 1999

MODEL OPTIMASI PENJADWALAN JOBSHOP UNTUK PRODUK-PRODUK BERSTRUKTUR MULTI-LEVEL

Tjutju T. Dimiyati*

Laboratorium Sistem Produksi Jurusan Teknik dan Manajemen Industri
Fakultas Teknik - Universitas Pasundan Bandung

Abstrak

Makalah ini membahas model optimasi untuk pengaturan operasi-operasi dari proses *jobshop* dalam pembuatan sejumlah produk yang berstruktur multi-level. Kriteria yang digunakan adalah minimasi waktu penyelesaian seluruh produk (*minimum makespan*). Pengembangan model dilakukan dengan memperhatikan hubungan kebergantungan (*Precedence Constraint*) antar operasi-operasi yang bersifat seri dalam pembuatan komponen dan hubungan kebergantungan antar operasi-operasi pada proses perakitan komponen menjadi *subassembly* atau perakitan *subassembly* menjadi produk akhir. Sebuah contoh numerik dari persoalan yang sederhana dikemukakan untuk melengkapi pembahasan makalah ini.

Kata kunci : proses *jobshop*, produk berstruktur multi-level, minimum makespan.

I. PENDAHULUAN

Sebagai salah satu aspek yang sangat penting dalam perencanaan dan pengoperasian sistem manufaktur, persoalan penjadwalan yang meliputi pengalokasian sumber dan pengurutan pekerjaan telah mendapat perhatian yang sangat besar dari para peneliti. Meskipun tidak dinyatakan secara eksplisit, pembahasan

persoalan penjadwalan pada umumnya berkaitan dengan penjadwalan produk-produk yang merupakan komponen tunggal, yaitu produk-produk yang hanya membutuhkan serangkaian operasi permesinan dengan urutan proses (*routing*) tertentu. Produk-produk seperti ini disebut sebagai produk-produk berstruktur satu level. Pada sistem manufaktur yang sebenarnya, seringkali produk-produk yang harus dijadwalkan mempunyai struktur multi-

* Fax (022) 4217340 Tel (022) 4217341 e-mail dimiyati@bdg.centrin.net.id

level, yaitu terdiri dari sejumlah part/komponen yang harus diproses melalui serangkaian operasi permesinan dan perakitan hingga menjadi produk akhir.

Makalah ini membahas pengembangan model optimasi untuk persoalan pengurutan dan penjadwalan operasi-operasi dari suatu proses jobshop dalam pembuatan sejumlah produk yang berstruktur multi-level. Model optimasi yang dikembangkan adalah model *Mixed Integer Linear Programming* (MILP), dengan fungsi tujuan meminimumkan waktu penyelesaian seluruh pekerjaan (minimasi makespan).

1.1 Karakteristik Persoalan

Karakteristik dari persoalan yang dimodelkan adalah sebagai berikut :

- Produk-produk yang dijadwalkan memiliki struktur multi-level, sehingga proses pembuatan produk-produk tersebut terdiri dari proses permesinan untuk pembuatan komponen dan proses perakitan komponen menjadi subassembly atau perakitan subassembly menjadi produk akhir
- Penjadwalan dilakukan untuk satu periode (*single period scheduling*)
- Untuk setiap produk akhir, penjadwalan dilakukan sebagai sebuah lot tunggal (tidak dilakukan *lot splitting*)

- Setiap mesin hanya dapat memproses satu operasi pada suatu saat tertentu

1.2 Asumsi Model

Asumsi yang digunakan dalam memodelkan persoalan ini adalah :

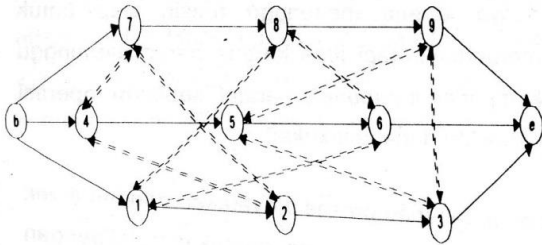
- Struktur dari seluruh produk yang dijadwalkan (*Bill-of-Materials*) sudah diketahui
- Waktu set-up mesin dan waktu transportasi antar mesin dapat diabaikan
- Urutan proses (*routing*) setiap produk diketahui dan dianggap tidak memiliki alternatif. Dengan kata lain, routing yang digunakan merupakan routing terbaik dan terpilih untuk dilaksanakan

II. MODEL DASAR PENJADWALAN JOBSHOP

Pada dasarnya persoalan penjadwalan jobshop adalah persoalan pengurutan sejumlah operasi yang diproses pada mesin tertentu dengan memperhatikan dua macam pembatasan yaitu :

- hubungan kebergantungan antar operasi (*precedence constraints*)
- konflik di antara operasi-operasi dalam penggunaan mesin (*disjunctive constraints*).

Mattfeld [9] menggambarkan persoalan ini dengan menggunakan *disjunctive digraph* seperti terlihat pada gambar 1.



Gambar 1
Digraph untuk 3-job 3-mesin jobshop

2.1 Precedence Constraints

Jika operasi j dari produk i diproses pada mesin k dan operasi (j-1) dari produk i yang sama diproses pada mesin h, maka :

$$S_{i(j-1)h} + t_{i(j-1)h} \leq S_{ijk} \text{ atau } C_{ijk} - t_{ijk} \geq C_{i(j-1)h}$$

S_{ijk} , C_{ijk} , dan t_{ijk} menyatakan saat dimulai, saat selesai, dan waktu yang diperlukan untuk memproses operasi j dari produk i pada mesin k. Jika a adalah operasi terakhir dari produk i, dan F adalah saat selesainya operasi terakhir dari seluruh produk yang dijadwalkan, maka berlaku : $S_{ia} + t_{ia} \leq F$ atau $C_{ia} \leq F$, sehingga fungsi tujuan minimasi waktu penyelesaian maksimum (*maximum completion time, Cmax*) dapat dinyatakan sebagai Minimasi F

2.2 Disjunctive Constraints

Pembatas ini menyatakan hubungan yang terjadi diantara operasi-operasi dari dua produk yang berbeda tetapi prosesnya menggunakan

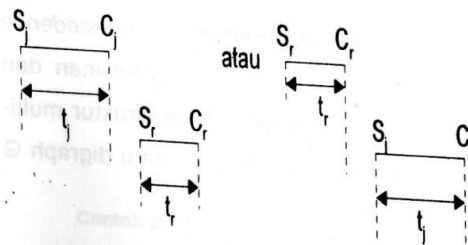
mesin yang sama. Jika operasi j pada mesin k mendahului operasi r pada mesin k yang sama, maka :

$$S_{rk} - S_{jk} \geq t_{jk} \text{ atau } C_{rk} - t_{rk} \geq C_{jk}$$

Sebaliknya jika operasi r mendahului operasi j pada mesin k yang sama maka :

$$S_{jk} - S_{rk} \geq t_{rk} \text{ atau } C_{jk} - t_{jk} \geq C_{rk}$$

Kondisi ini ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2
Hubungan produk j dengan produk r

Model-model matematis yang telah dikembangkan mengakomodasi pembatas disjunctive ini dengan menggunakan variabel indikator bernilai 0 atau 1. Bowman [4] mendefinisikan variabel biner tersebut sebagai :

$$y_{jkt} = \begin{cases} 1, & \text{jika operasi j diproses pada mesin k pada waktu } t; t = 1, 2, \dots, T \\ 0, & \text{jika tidak} \end{cases}$$

Sedangkan Manne [8] mendefinisikannya sebagai berikut :

$$y_{jrk} = \begin{cases} 1, & \text{jika operasi j mendahului operasi r pada mesin k} \\ 0, & \text{jika tidak} \end{cases}$$

Definisi variabel biner yang digunakan oleh Manne, juga digunakan oleh peneliti yang lain, seperti Greenberg [6], dan Baker [3]. Dengan variabel biner di atas, Manne menyatakan

pembatas disjunctive sebagai :

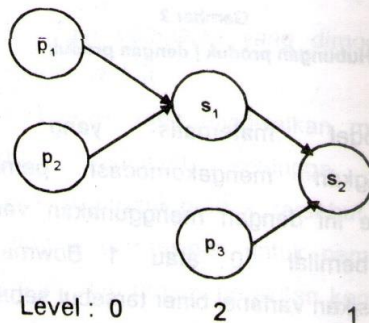
$$(\alpha + t_{rk}) y_{jrk} + (S_{jk} - S_{rk}) \geq t_{rk}$$

$$(\alpha + t_{jk}) (1 - y_{jrk}) + (S_{rk} - S_{jk}) \geq t_{jk}$$

α adalah bilangan besar positif.

2.3 Produk Berstruktur Multi-level

Hubungan ketergantungan (*precedence relationship*) di antara proses permesinan dan proses perakitan pada produk berstruktur multi-level dapat dinyatakan sebagai suatu digraph G sebagai berikut :



Gambar 3
Digraph untuk produk akhir S_2

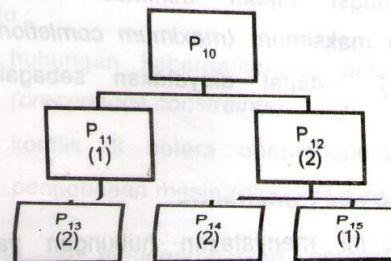
Hubungan ketergantungan yang terjadi adalah P_1 dan P_2 harus sudah selesai melalui proses permesinan sebelum proses perakitan subassembly S_1 dilakukan. Pada sistem seperti ini maka *delay* yang terjadi bukan

hanya karena menunggu mesin siap untuk memproses, tapi juga karena harus menunggu komponen-komponen paralel sebelum operasi perakitan dapat dilakukan.

Setiap tahapan proses dinyatakan dengan level dimana penomoran level produk dimulai dengan menyatakan level 0 untuk produk akhir (*root node*), kemudian nomor level bertambah satu pada setiap langkah mundur hingga mencapai node awal (komponen/part dasar). Secara tidak langsung gambar di atas juga menunjukkan bahwa operasi-operasi yang harus dijadwalkan terdiri dari operasi-operasi yang bersifat seri, paralel, dan campuran keduanya.

III. PENGEMBANGAN MODEL

Pada model yang dikembangkan ini, setiap produk akhir i yang dipesan dinotasikan dengan P_{i0} sedang komponen ke j dari produk akhir dinotasikan dengan P_{ij} . Misalkan suatu produk memiliki struktur yang terdiri dari 3 level dengan 5 komponen sebagai berikut :



Gambar 4.
Contoh struktur suatu produk

P_{11} adalah induk langsung bagi P_{13} sedang P_{10} adalah induk langsung bagi P_{11} dan P_{12} . Jika $Z(P_{ij})$ menyatakan set dari induk-induk komponen j hingga produk akhir i , maka :

$$Z(P_{13}) = \{ P_{11}, P_{10} \}; \quad Z(P_{14}) = \{ P_{12}, P_{10} \}; \\ \text{dan } Z(P_{15}) = \{ P_{12}, P_{10} \}$$

Angka-angka di dalam tanda kurung pada Gambar 4. (dinotasikan sebagai H_{ij}) menyatakan banyaknya komponen j yang dibutuhkan untuk membuat satu unit induk langsungnya. Dengan demikian, jika produk akhir P_{10} akan dibuat sebanyak Q_{10} maka total komponen P_{ij} yang dibutuhkan adalah sebanyak

$$Q_{ij} = Q_{10} * H_{ij} (\prod H_{ik}), \text{ dimana } H_{ik} \geq 1$$

$P_{ik} \in Z(P_{ij})$

$P_{ik} \in Z(P_{ij})$

Sebagai contoh, jika produk P_{10} pada gambar di atas akan dibuat sebanyak 100 unit, maka kebutuhan untuk masing-masing komponen adalah :

$$P_{11} = Q_{10} * H_{11} = 100 * 1 = 100 ;$$

$$P_{12} = Q_{10} * H_{12} = 100 * 2 = 200 ;$$

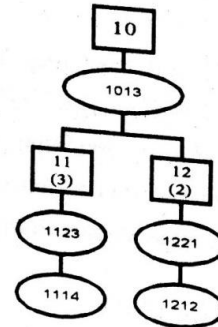
$$P_{13} = Q_{10} * H_{11} * H_{13} = 100 * 1 * 2 = 200 ;$$

$$P_{14} = Q_{10} * H_{12} * H_{14} = 100 * 2 * 2 = 400 ;$$

$$\text{dan } P_{15} = Q_{10} * H_{12} * H_{15} = 100 * 2 * 1 = 200.$$

Berkaitan dengan seluruh operasi yang harus dilakukan, baik dalam proses pembuatan komponen maupun perakitannya hingga

menjadi produk akhir, maka dilakukan pengaturan terhadap variabel S_{ijkm} dan C_{ijkm} yang masing-masing menyatakan waktu dimulai dan selesainya operasi ke- k untuk komponen P_{ij} yang dilakukan di mesin m . Perhatikan gambar berikut :



Gambar 5.
Contoh struktur suatu produk dan uraian operasi-operasinya

Jika P_{ij} adalah komponen pada level yang paling rendah, maka saat paling cepat dimulainya operasi pertama dari proses pembuatan komponen tersebut adalah pada waktu siap (ready time) dari mesin yang digunakan. Dengan menotasikan waktu siap ini sebagai R_m dimana $R_m \geq 0$, maka $S_{ijtm} \geq R_m$.

Sebagai contoh, misalkan waktu siap mesin 4 dan mesin 2 masing-masing adalah pada menit ke-10 dan dan menit ke-7, maka untuk contoh produk pada gambar 5 di atas $S_{1114} \geq 10$ dan $S_{1212} \geq 7$

Karena operasi-operasi berikutnya dapat dimulai paling cepat pada saat operasi sebelumnya selesai, maka $C_{ij(k-1)m} - S_{ijkm'} \leq 0 \quad \forall i, j, k, m$

Pada contoh di atas, $C_{1114} - S_{1123} \leq 0$ dan $C_{1212} - S_{1221} \leq 0$

Jika P_{ib} adalah induk langsung dari P_{id} dan operasi ke-a adalah operasi terakhir dalam proses pembuatan P_{id} , maka saat paling cepat dimulainya operasi pertama untuk P_{ib} adalah saat selesainya operasi terakhir dari P_{id} , atau :

$$C_{idam} - S_{ib1m'} \leq 0.$$

Pada contoh di atas, $C_{1123} - S_{1013} \leq 0$ dan $C_{1221} - S_{1013} \leq 0$.

Jika F adalah makespan, maka $C_{i0am} - F \leq 0$.
 Pada contoh di atas, $C_{1013} - F \leq 0$

Jika operasi ke-k yang dilakukan di mesin m untuk memproses satu unit P_{ij} membutuhkan waktu selama t_{ijkm} , maka waktu yang dibutuhkan untuk membuat Q_{ij} unit dapat dinyatakan sebagai $C_{ijkm} - S_{ijkm} = Q_{ij} * t_{ijkm}$

Pada contoh di atas, jika produk akhir P_{10} akan dibuat 5 unit dan waktu operasi $t_{1013} = 4$; $t_{1123} = 2$; $t_{1114} = 1$; $t_{1221} = 3$; dan $t_{1212} = 5$, maka :

$$C_{1013} - S_{1013} = 5 * 4 = 20$$

$$C_{1123} - S_{1123} = 3 * 5 * 2 = 30$$

$$C_{1114} - S_{1114} = 3 * 5 * 1 = 15$$

$$C_{1221} - S_{1221} = 2 * 5 * 3 = 30 ; \text{ dan}$$

$$C_{1212} - S_{1212} = 2 * 5 * 5 = 50$$

Akhirnya, karena tidak ada dua operasi yang dapat diproses bersamaan pada suatu mesin m tertentu, maka jika α adalah bilangan positif besar dan operasi-operasi yang bersaing dalam menggunakan mesin m tersebut adalah operasi ke-k untuk P_{ij} dan operasi ke-s untuk P_{qr} , hubungan yang berlaku adalah :

$$\text{Dan } C_{ijkm} - C_{qrs m} + \alpha (X_{ijkqrs m}) \geq t_{ijkm} * Q_{ij}$$

$$C_{qrs m} - C_{ijkm} + \alpha (1 - X_{ijkqrs m}) \geq t_{qrs m} * Q_{qr}$$

Nilai $X_{ijkqrs m}$ adalah 1, jika P_{ij} mendahului P_{qr} , atau 0 jika sebaliknya.

Dengan demikian formulasi lengkap dari model yang dikembangkan adalah :

$$\text{Min } F \quad (1)$$

dengan pembatas :

$$S_{ij1m} \geq R_m, \quad \forall m ; \text{ untuk } P_{ij} \text{ pada level terendah} \quad (2)$$

$$C_{ij(k-1)m} - S_{ijkm'} \leq 0; \quad \forall i, j, k, m \quad (3)$$

$$C_{idam} - S_{ib1m'} \leq 0; \quad \forall i, m \quad (4)$$

$$C_{i0am} - F \leq 0; \quad \forall i, m \quad (5)$$

$$C_{ijkm} - S_{ijkm} = Q_{ij} * t_{ijkm}; \quad \forall i, j, k, m \quad (6)$$

$$C_{ijkm} - C_{qrs m} + \alpha (X_{ijkqrs m}) \geq t_{ijkm} * Q_{ij} \quad \forall i, j, k, q, r, s \quad (7)$$

$$C_{qrs m} - C_{ijkm} + \alpha (1 - X_{ijkqrs m}) \geq t_{qrs m} * Q_{qr} \quad (7a)$$

$$X_{ijkqrs} \in \{0, 1\}; \forall i, j, k, q, r, s, m \quad (8)$$

$$F, C_{ijkm}, S_{ijkm} \geq 0; \text{integer}$$

F adalah *makespan*, sedang pembatas (2) menyatakan bahwa saat paling cepat dimulainya suatu operasi adalah ketika mesin yang diperlukan siap untuk melakukan proses. Pembatas (2) ini menyebabkan model yang dikembangkan tidak mengharuskan waktu siap seluruh mesin adalah $R_m = 0$. Pembatas (3) dan (4) menyatakan urutan operasi dalam pembuatan komponen dan perakitan sub-assembly atau produk akhir, sedang pembatas (5) mendefinisikan *makespan* sebagai waktu penyelesaian terpanjang dari seluruh proses yang dilakukan. Pembatas (6) menyatakan waktu yang diperlukan untuk memproses masing-masing produk/komponen, sedang pembatas (7) dan (7a) menyatakan bahwa setiap mesin hanya dapat memproses satu operasi pada suatu waktu tertentu. Pembatas (8) menjamin bahwa pada suatu saat tertentu tidak akan ada lebih dari satu operasi yang diproses pada suatu mesin tertentu.

IV. CONTOH NUMERIK

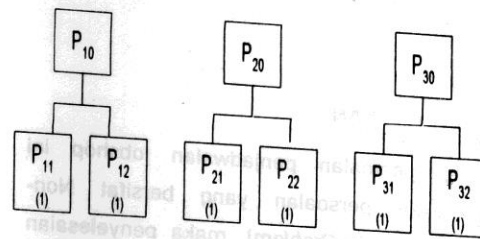
Berikut ini dikemukakan sebuah contoh sederhana sebagai ilustrasi dari persoalan penjadwalan untuk produk-produk berstruktur multi-level. Misalkan penjadwalan akan dilakukan untuk memproses tiga jenis produk yang masing-masing terdiri dari dua komponen.

Struktur produk (*Bill-of-Material*) untuk masing-masing produk adalah seperti pada Gambar 6, sedang urutan proses (*routing*) adalah seperti pada Tabel 1.

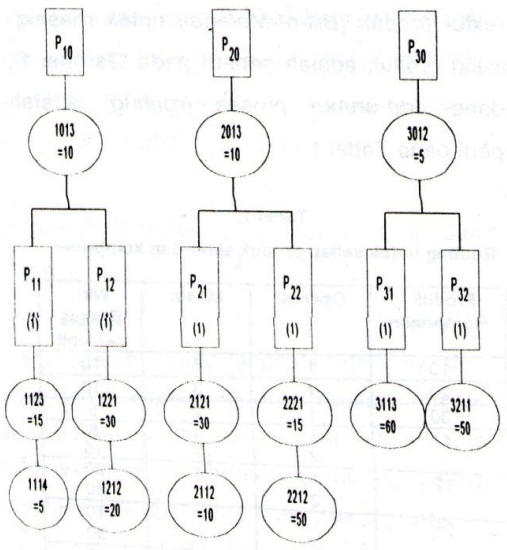
Tabel 1.
Routing untuk setiap produk akhir dan komponen

Produk / Komponen	Operasi	Mesin	Wkt. Proses per-unit
10	1	3	10
20	1	3	10
30	1	2	5
11	1	4	5
	2	3	15
12	1	2	20
	2	1	30
21	1	2	10
	2	1	30
22	1	2	50
	2	1	15
31	1	3	60
32	1	1	50

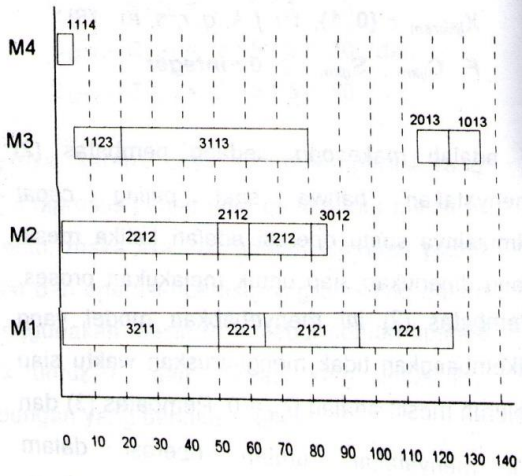
Berdasarkan BOM dan Routing tersebut, maka disusun uraian operasi-operasi (*Bill-of-Operations*) yang akan dijadwalkan, seperti pada Gambar 7.



Gambar 6.
Struktur Produk yang dijadwalkan



Gambar 7.
Bill-of-Operations



Gambar 8.
Jadwal Optimal

Dengan tidak menghilangkan kemungkinan lainnya, persoalan diformulasikan dengan menetapkan $R_m = 0$ untuk seluruh mesin. Perhitungan dilakukan dengan menggunakan software matematik *LINDO-Hyper* dan diperoleh jadwal optimal dengan makespan = 135 seperti pada Gambar 8.

V. KESIMPULAN

Karena persoalan penjadwalan jobshop ini merupakan persoalan yang bersifat Non-Polynomial (*NP-Problem*), maka penyelesaian secara analitis hanya akan efektif untuk persoalan dengan ukuran kecil.

Pada contoh soal di atas terlihat bahwa meskipun produk-produk yang dijadwalkan memiliki BOM yang sangat sederhana dengan jumlah operasi yang relatif sedikit, formulasi persoalan terdiri dari 44 variabel dan 77 fungsi pembatas. Dari 44 variabel itu, 17 diantaranya merupakan variabel biner yang sangat besar kontribusinya terhadap tingkat kesulitan dan waktu perhitungan. Jumlah variabel dan fungsi pembatas yang akan terlibat dalam formulasi persoalan ini, dipengaruhi oleh jumlah operasi, jumlah komponen, dan banyaknya pembatas *disjunctive* yaitu pembatas yang menyatakan banyaknya operasi-operasi yang bersaing dalam menggunakan suatu mesin.

Karena itu, untuk menyelesaikan persoalan-persoalan pada sistem nyata yang umumnya

berukuran besar, maka perlu dilakukan penelitian lebih lanjut untuk memperoleh cara penyelesaian yang lebih mudah.

VI. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ashour, S. and Hiremath, S.R., "A Branch-and-Bound Approach to the Job Shop Scheduling Problem", *International Journal of Production Research*, Vol. 11, No. 1, 1973
- [2] Askin, R.G. and Standridge, C.R., "Modeling and Analysis of Manufacturing Systems", John Wiley & Sons, Inc, 1993
- [3] Baker, K.R., "Introduction to Sequencing and Scheduling", John Wiley, New York, 1974
- [4] Bowman, E.H., "The Schedule - Sequencing Problem", *Operations Research*, Vol. 7, 1959
- [5] Doctor, S.R., Cavalier, T. M., and Egbelu, P.J., "Scheduling for Machining and Assembly in a Job Shop Environment", *International Journal of Production Research*, Vol. 31, No. 6, 1993
- [6] Greenberg, H.H., "A Branch-and-Bound Solution to the General Scheduling Problem", *Operations Research*, Vol. 8, 1968
- [7] Lageweg, B.J., Lenstra, J.K., and Rinnooy Kan, A.H.G., "Job Shop Scheduling by Implicit Enumeration", *Management Science*, Vol. 24, 1977
- [8] Manne, A.S., "On the Job Shop Scheduling Problem", *Operations Research*, Vol. 8, 1960
- [9] Mattfeld, D.C., "Evolutionary Search and the Job Shop", *Physica-Verlag Heidelberg*, 1995